

∞ Baccalauréat Bordeaux juin 1951 ∞

**Série mathématiques et mathématiques et technique**

**Exercice 1**

1. On considère une ellipse (E) de centre O, d'axes AA' et BB', de foyers F et F'.

$$AA' = 2a; BB' = 2b; (b < a); FF' = 2c.$$

Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée. Montrer que la division AA'FH est harmonique.

La perpendiculaire à AA' en F coupe (E) en K et K'; en utilisant le cercle principal, montrer que la tangente KT à (E) en K passe par H.

Calculer FK, OH, FH et la tangente de l'angle de KT avec le grand axe.

On donnera des expressions rationnelles en  $a, b, c$ .

2. On considère dans un plan vertical (V) deux axes perpendiculaires  $x'_1 Sx_1, z' Sz$  ( $Sx_1$  est horizontal et orienté vers la droite,  $Sz$  est vertical et orienté vers le haut).

D'autre part on désigne par (Q) le plan horizontal perpendiculaire à  $z' Sz$  en un point O situé sur  $Sz'$ . Un segment de longueur constante  $2\ell$ , dont les extrémités se déplacent sur les demi-droites  $Sx_1$ , et  $Sz$ , est le diamètre d'un cercle (C) dont le plan est perpendiculaire au plan (V).

Soit  $\alpha$  l'angle aigu du segment avec  $x'_1 Sx_1$ , et soit (E) la projection du cercle (C) sur le plan (Q).

On propose aux candidats l'étude des courbes (E) :

- a. Calculer les demi-axes, la demi-distance focale à l'aide de  $\ell$  et  $\alpha$ .

Quelle est l'excentricité?

Trouver le lieu des sommets et celui des foyers.

Trouver l'enveloppe des cercles directeurs.

- b. Soient  $\omega$  le centre de (E);  $y'Oy$  la tangente en O à (E);  $x'Ox$  l'axe perpendiculaire en O à  $y'Oy$ ; A et A' les sommets du grand axe, F et F' les foyers.

La perpendiculaire en F à AA' coupe (E) en deux points; on désigne par K le point le plus près de  $y'Oy$ .

Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée; A est entre F et H; la tangente en K à (E) passe par H et coupe  $x'Ox$  en I.

Calculer FK,  $\omega H$ , FH en fonction de  $\ell$  et  $\alpha$ .

Si  $\beta$  est l'angle de IH avec le grand axe, montrer que  $\text{tg } \beta = \sin \alpha$ .

Montrer que  $\omega I = \ell$ .

Soit K' la projection de F sur  $y'Oy$ ; IK' coupe le grand axe en J.

Montrer que OK passe par J.

En déduire une construction simple des points K et H quand on se donne le point F sur son lieu.

Montrer que l'angle de IJ avec le grand axe est  $\frac{\alpha}{2}$ .

IH coupe  $y'Oy$  en L; montrer que FL coupe  $x'Ox$  en un point fixe Q.

- c. Le cercle de centre  $\Omega$ , de rayon  $\ell$ , coupe  $x'Ox$  en  $O$  et en  $O_1$ ;  $IH$  coupe ce cercle en  $M$  et  $M_1$ ; les perpendiculaires en  $M$  et  $M_1$  à  $IH$  coupent  $x'Ox$  en  $\varphi$  et en  $\varphi_1$ .  
 Montrer que  $Q$  est le milieu de  $\varphi\varphi_1$ .  
 Montrer, en évaluant la puissance de  $I$  par rapport au cercle de diamètre  $\varphi\varphi_1$  que  $\varphi$  et  $\varphi_1$  sont fixes.  
 Évaluer le produit  $\overline{\varphi M} \cdot \overline{\varphi_1 M_1}$ .  
 Montrer que l'enveloppe de  $IH$  est une hyperbole dont on demande les éléments.  
 La droite  $IH$  coupe la perpendiculaire  $y_1'Oy$ , à  $x'Ox$  en un point  $L_1$ .  
 Évaluer  $OL$  et  $O_1L_1$  en fonction de  $\ell$  et  $\alpha$ . Quelle est la valeur du produit  $\overline{OL} \cdot \overline{O_1L_1}$ .

### Exercice 2

1<sup>er</sup> sujet. - Primitives d'une fonction. Signification géométrique.

Application : Calculer l'aire comprise entre l'axe des  $x$ , la courbe  $y = 3x^2 - 2x - 1$  et les droites  $x = -2$ ,  $x = +2$ .

2<sup>e</sup> sujet. - Dérivée. Signification géométrique.

Dérivée de la racine carrée d'une fonction possédant une dérivée.

Application : Dérivée de la racine carrée de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 3x - 1}{\sin 3x}$$

3<sup>e</sup> sujet. - Variation et représentation graphique de

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 1}$$