Baccalauréat Bordeaux juin 1947
Série mathématiques et technique

I.

On considère deux cercles (C) de centre O, de rayon R, et (C$'$) intérieur à (C), de centre O$'$, de rayon r, le point O$'$ étant situé sur l'axe Ox, $\overline{\text{OO}'} = a$.
Un point M variable sur la circonférence de (C) est défini par l'angle

$$(\text{O}x,\ \text{OM}) = 2\varphi.$$

1. M_1 et M_2 étant deux points de (C) définis par les angles φ_1 et φ_2, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la corde M_1M_2 soit tangente à (C$'$) peut s'écrire

   $$(1)\qquad (a-R)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - (a+R)\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + r = 0.$$

   On pourra considérer le milieu P de la corde M_1M_2 et le point de contact P$'$ avec (C$'$) et projeter le contour OO$'$P$'$P sur OP.
2. On mène de M_2 la seconde tangente à (C$'$) – la première étant M_2M_1 – qui rencontre (C) en M_3.

   Montrer qu'il existe entre les paramètres φ_1 et φ_3, de M_1 et M_3 une relation de la forme,

   $$(2)\qquad A\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + B\sin\varphi_1\sin\varphi_3 + C = 0$$

   et donner des expressions de A, B, C en fonction de a, R, r.

   Pour cela, on pourra écrire la relation (1) pour φ_1, φ_2 et pour φ_2, φ_3, tirer $\cos\varphi_2$ et $\sin\varphi_2$ des deux équations ainsi obtenues et porter dans la relation $\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2 = 1$.
3. En comparant les relations (1) et (2), montrer que l'enveloppe de la corde M_1M_2 est un cercle (K).

   Former la relation que doivent vérifier a, R, r pour que (K) coïncide avec (C$'$).

   Démontrer que st. deux cercles (C) et (C$'$) sont tels qu'il existe un triangle inscrit dans (C), circonscrit à (C$'$), il existe une infinité de tels triangles.

   Quel est le lieu du centre du cercle des neuf points de ces triangles ?

II. 1er sujet

Homothétie.
Produit de deux homothéties.

II. 2e sujet

Dérivées des fonctions

$$y = \sin x,\quad y = \cos x \quad\text{et}\quad y = \operatorname{tg} x.$$

II. 3^{e} sujet

Tangentes menées d'un point à une ellipse.