~ Brevet d'Études du Premier Cycle ~
Antilles juin 1962

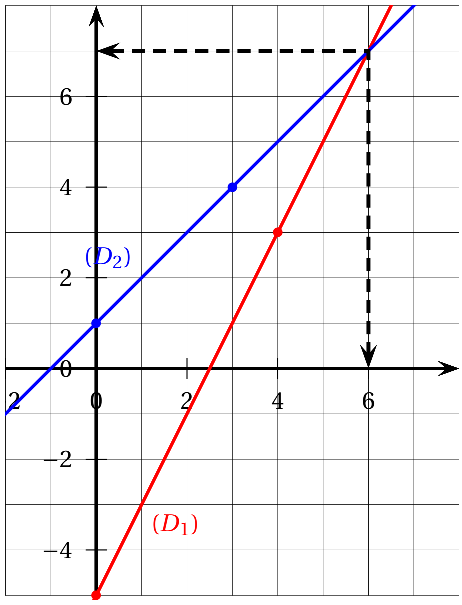
ENSEIGNEMENT LONG ET ENSEIGNEMENT COURT.

ALGÈBRE

On donne l'expression

$$A(x) = (2x-5)(x-1)^2 - 4(2x-5).$$

1. $A(x) = (2x-5)\left(x^2-2x+1\right) - 8x+20 = 2x^3-4x^2+2x-5x^2+10x-5-8x+20 = 2x^3-9x^2+4x+15$.
2. $A(x) = (2x-5)\left[(x-1)^2-4\right] = (2x-5)\left[(x-1)^2-2^2\right] = (2x-5)(x-1+2)(x-1-2) = (2x-5)(x+1)(x-3)$.
   On $A(x)=0$ si et seulement si $(2x-5)(x+1)(x-3)=0$: ce produit est nul si l'un des facteurs est nul, soit :
   $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-5 & = & 0\\ x+1 & = & 0\\ x-3 & = & 0\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{lcl} 2x & = & 5\\ x & = & -1\\ x & = & 3\end{array}\right.$ et enfin $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{5}{2}\\ x & = & -1\\ x & = & 3\end{array}\right.$.
   On a donc $A\left(\frac{5}{2}\right) = A(-1) = A(3) = 0$.
3. $$B(x) = \frac{(2x-5)(x-1)^2-4(2x-5)}{(x+1)^2(x-3)}.$$
   D'après les deux premières questions $B(x) = \dfrac{A(x)}{(x+1)^2(x-3)}$, soit en prenant l'écriture factorisée de $A(x)$,
   $B(x) = \dfrac{(2x-5)(x+1)(x-3)}{(x+1)^2(x-3)} = \dfrac{2x-5}{x+1}$ si $x \neq -1$ et si $x \neq 3$.
4. $B(x)=1$ si et seulement si $\dfrac{2x-5}{x+1} = 1$ soit si $2x-5 = x+1$ ou en ajoutant à chaque membre $-x+5$: $x=6$.
5. $$y = 2x-5 \qquad \text{et} \qquad y = x+1.$$
   (D_1) est tracée avec les points de coordonnées $(0~;~-5)$ et $(4~;~3)$ et (D_2) avec les points $(0~;~1)$ et $(3~;4)$



Les deux droites représentatives des deux fonctions sont sécantes s'il existe deux nombres x et y tels que :

$y = 2x - 5 = x + 1$, donc tels que $\dfrac{2x-5}{x+1} = 1$, soit $B(x) = 1$ Or on a vu à la question 4 que la solution de cette équation est $x = 6$, d'où l'on déduit $y = x + 1 = 6 + 1 = 7$.

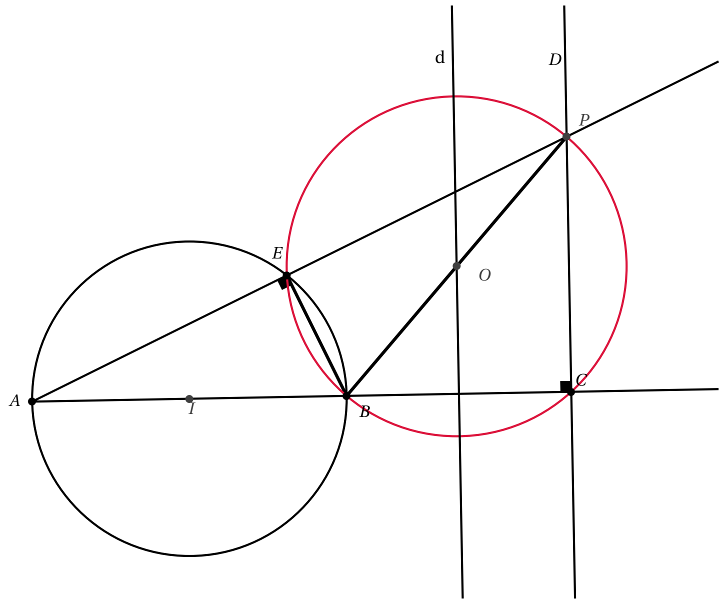
L'abscisse du point commun aux deux droites est la solution de l'équation $B(x) = 1$.

GÉOMÉTRIE

Sur une droite xy on considère le segment [AB] mesurant 35 mm et un point C, extérieur à [AB], tel que

$$\frac{\text{CA}}{\text{CB}} = \frac{12}{5}.$$

On trace le cercle de diamètre [AB], puis on élève en C la perpendiculaire D à xy.
On prend sur D un point P ; (AP) recoupe le cercle en E.



Corrigé.

1. Calculer CA et CB.

Si ce point B existe comme $\dfrac{\text{CA}}{\text{CB}} > 1$, B appartient au segment [AC] et AC = AB + BC.

On a donc $\dfrac{AB}{BC} + 1 = \dfrac{12}{5}$ ce qui donne $\dfrac{\text{AB}}{\text{BC}} = \dfrac{7}{5}$ puis $\text{BC} = \dfrac{5}{7}\text{AB}$.

Réciproquement soit C le seul point de la demi-droite d'origine B ne contenant pas A tel que $\text{BC} = \text{AB}\dfrac{5}{7}$, on a alors $\dfrac{\text{AC}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{AB}+\text{BC}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{BC}} + 1 = \dfrac{7}{5} + 1 = \dfrac{12}{5}$.

$\text{BC} = \text{AB}\dfrac{5}{7}$ et $\text{AC} = \text{AB}\dfrac{12}{7}$.

Comme AB = 35 (mm) BC = 25 (mm) et AC = 60 (mm).

2. Démontrer que les triangles ACP et AEB sont semblables.

Les triangles ACP et AEB sont semblables car ils ont les mêmes angles. En effet ils sont rectangles et ont un angle aigu en commun :

$\widehat{\text{BAE}} = \widehat{\text{CAP}}$ car B et E sont sur les segments [AC] et [AB] respectivement.

Le triangle ACP est rectangle par hypothèse.

Le triangle AEB est rectangle car il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB].

Évaluer le produit AP × AE.

On a donc $\dfrac{\text{AE}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{AP}}$ et par conséquent $\text{AE} \times \text{AP} = \text{AB} \times \text{AC} = \text{AB}^2 = \dfrac{12}{7}2\,100$.

Remarque ; les rapports valent $cos\widehat{EAB}$.

Lorsque CP = 45 mm, calculer AP et AE.

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACP donne $\text{AP}^2 = \text{CP}^2 + \text{AC}^2$ soit $\text{AP}^2 = 5\,625$ donc $\text{AP} = \sqrt{5\,625} = 75$. On a donc $\text{AE} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{\text{AP}} = \dfrac{2\,100}{75} = 28$.

3. Montrer que le quadrilatère BCPE est inscriptible dans un cercle.

Le triangle PEB est rectangle car AEB l'est (inscrit dans le cercle de diamètre [AB]) et BCP l'est aussi par hypothèse ils sont inscrits dans le cercle de diamètre [BP] par conséquent le quadrilatère BCPE est inscriptible dans ce cercle ..

Préciser la position du centre O de ce cercle et évaluer son rayon lorsque PCP= 45 mm.

Son centre O est le milieu de [BP]. Le rayon R du cercle est $\dfrac{\text{BP}}{2}$.

Calculons BP. L théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BCP donne

$\text{BP}^2 = \text{BC}^2 + \text{CP}^2 = 25^2 + 45^2 = 5^2(5^2 + 9^2) = 5^2 \times 106$, donc $R = \dfrac{5 \times \sqrt{106}}{2}$.

4. Sur quelle ligne se déplace le centre O lorsque P se déplace sur D ?

On a OB = OC = R donc O appartient alors à la médiatrice d de [BC] qui est l'ensemble des points équidistants de B et C.