Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Problème 1 : VRAI - FAUX

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Proportionnalité

1. Pour que le tableau ci-contre soit un tableau de proportionnalité il faut et il suffit que $m = 5$.

$1-m$	-3
8	$1+m$

2. Après une augmentation de 55%, le coût d'un produit a baissé de 28%.
   Le pourcentage d'augmentation total est de 27%.

3. Si l'on augmente son rayon de 22%, l'aire d'un disque augmente de 44%.

Analyse

4. On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$
   On a
$$\frac{1}{e} \leqslant F(1) \leqslant 1 - \frac{1}{e}.$$

5. On note pour tout réel $t \geqslant 1$,
$$A(t) = \int_1^t x^2 \ln x \, dx.$$
   On a
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{A(t)}{t^2} = +\infty.$$

6. Toute suite (u_n) qui vérifie l'assertion suivante tend vers $+\infty$.
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,;\, \forall A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

Arithmétique

7. On a $\dfrac{3}{11} = 0,272727272727$.

8. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. La contraposée de l'assertion "n^2 pair $\Rightarrow$ n pair" est "n pair $\Rightarrow$ n^2 pair".

10. Si la somme des chiffres en base 10 d'un entier naturel est divisible par 3 alors cet entier est divisible par 9.

11. Soient a et b deux entiers naturels et n un entier naturel non nul.
Si $2a \equiv 2b \pmod{n}$ alors $a \equiv b \pmod{n}$.

12. Soit n un entier naturel non nul, la somme des n premiers nombres impairs est égale au carré de $2n+1$.

13. Soient a, b et c trois entiers tels que $a^2 = b^2 + c^2$.
L'un au moins des nombres a, b et c est multiple de 5.

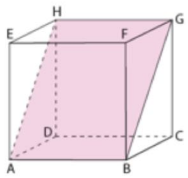
Géométrie

14. Un triangle dont les mesures des angles sont dans un ratio 1 : 2 : 3 est un triangle rectangle.

15. Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle ABC sur lequel sont construits extérieurement les triangles équilatéraux ABD et ACE.
On a $BE = DC$.

16. Dans un espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, les droites D et D' de représentations paramétriques
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 3-t \\ z & = & 5-2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 3-t \\ z & = & -5t-1 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$ sont coplanaires.

17. On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.



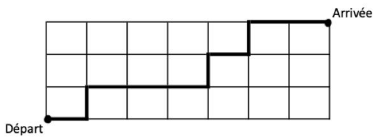
On se place dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}\,; \overrightarrow{DC}\,; \overrightarrow{DH}\,)$.

Le point $K(9;-10;-8)$ est un point du plan (ABG).

Dénombrement-Probabilités

18. Soit E un ensemble fini non vide dont un des éléments est noté a.
Il y a autant de parties de E contenant a que de parties ne le contenant pas.

19. Le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le quadrillage ci-dessous est égal à120.



20. Une agence reçoit en moyenne 8 appels téléphoniques par heure. On modélise le nombre d'appels reçus par heure par une loi de Poisson.
La probabilité qu'il y ait plus de 3 appels téléphoniques au cours d'une heure est supérieure à $0,95$.

21. Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- les évènements A et B sont indépendants ;
- les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

22. On dépose au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n urnes numérotées de 1 à n, en plaçant une boule par urne.
L'espérance du nombre de coïncidences (boule de même numéro que l'urne où elle se trouve) est égale à 1.

Algorithmique

23. Le programme ci-dessous est écrit en langage Python.
En saisissant la commande $encadrement(0, 2, 0.001)$, on obtient un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3} de la solution de l'équation $e^{\frac{x}{2}} + x^2 - 3 = 0$ dans l'intervalle $[0; 2]$.

```python
from math import *
def f(x):
  return exp(0.5*x)+x**2-3
def encadrement(a,b,epsilon):
  m = (a + b)/2
  while b - a > epsilon:
    if f(a)*f(m) < 0 :
      b = m
    else:
      a = m
  return a, b
```

Problème 2 : quelques modèles de dynamique d'une population

Dans ce problème, on s'intéresse à différents modèles d'évolution d'une population.
Les trois parties sont indépendantes.

Le modèle logistique discret

Dans cette partie, on modélise la taille de la population par une suite (u_n) où n est un entier naturel qui désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine.

On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < M.$$

Dans toute cette partie, on suppose $0 < u_0 < M$, et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{M}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On a alors $v_0 \in]0, 1[$.

On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \ = \ av_n(1 - v_n). \tag{1}$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $0 < a \leqslant 1$ et de faire une étude numérique pour le cas $a = \dfrac{5}{2}$.

Le cas $0 < a \leqslant 1$.

On rappelle que $v_0 \in]0, 1[$.
On considère les fonctions f_a et g_a définies sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_a(x) = ax(1 - x) \text{ et } g_a(x) \ = \ f_a(x) - x.$$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction f_a sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.
3. Démontrer que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$, alors ℓ est un point fixe de f_a, c'est-à-dire que $f_a(\ell) = \ell$.
4. Démontrer que f_a admet 0 pour unique point fixe dans l'intervalle $[0, 1]$.
5. Démonter que $g_a(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. On pourra utiliser que $1 - \frac{1}{a} \leqslant 0$.
6. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
7. Justifier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel que l'on déterminera.
8. Que prédit le modèle sur l'évolution de la taille de la population dans ce cas ?

Le cas $a = \dfrac{5}{2}$.

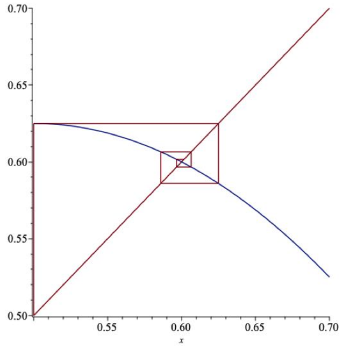
On pose $v_0 = \dfrac{1}{2}$. On introduit les fonctions f, g et h définies pour $x \in [0, 1]$, par

$$f(x) = \frac{5}{2}x(1 - x) \ , \ g(x) = f(x) - x \text{ et } h(x) = f \circ f(x) - x.$$

9. Démontrer que f admet sur $[0, 1]$ exactement deux points fixes.
10. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4. On donnera les valeurs décimales à 10^{-3} près.
11. Écrire un algorithme qui permet de calculer les 10 premiers termes de la suite (v_n). En déduire v_{10}.

12. Dans un repère orthonormé on a représenté, sur le graphique ci-dessous, pour des abscisses comprises entre $0,5$ et $0,7$:
    - la courbe représentative de la fonction f,
    - la droite d'équation $y = x$.

    Reproduire le graphique en mettant en évidence les nombres v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.



13. Vérifier que l'on a
$$\forall x \in [0,1],\ h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}.$$
14. En déduire que les fonctions f et $f \circ f$ ont les mêmes points fixes sur $[0,1]$.
15. Etudier le signe de la fonction h sur l'intervalle $[0, \frac{3}{5}]$.
16. On admet que l'intervalle $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ est stable par la fonction $f \circ f$. Déduire de la question précédente que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
17. Démontrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$.
18. En déduire que la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $\frac{3}{5}$, puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$.
19. Conclure sur le comportement asymptotique de la taille de la population prédit par le modèle.

Le modèle logistique continu

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est représentée par le réel $y(t)$ où y désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.
On suppose que la taille de la population est bornée par un réel strictement positif M, c'est-à-dire que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < y(t) < M.$$
On suppose qu'il existe un réel strictement positif a tel que y soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) \ = \ a\, y(t)(M - y(t)). \tag{2}$$

20. *a.* Démontrer qu'il existe des réels α, β que l'on déterminera tels que pour tout réel z vérifiant $0 < z < M$,
$$\frac{1}{z(M-z)} \ = \ \alpha\,\frac{1}{z} + \beta\,\frac{1}{M-z}.$$
    En déduire que y vérifie l'équation :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha\,\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\,\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a = 0.$$
    b. Déterminer en fonction de a et de M, une primitive de la fonction
$$\psi : t \mapsto \alpha\,\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\,\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

21. Déduire de la question précédente qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$y(t) \;=\; \frac{cM\,\mathrm{e}^{aMt}}{1 + c\,\mathrm{e}^{aMt}}.$$

22. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.
23. Qu'en déduire sur l'évolution de la population prédite par le modèle ?

Un modèle proies-prédateurs discret

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de deux populations dans le même milieu : une population de proies, et une population de prédateurs.
En préliminaire, on étudie les suites (x_n) et (y_n) définies par les relations de récurrence suivantes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= \; x_n - \alpha\, y_n \\ y_{n+1} &= \; y_n + \alpha\, x_n \end{cases}$$

où α est un réel strictement positif et indépendant de n.

24. On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

    a. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ à l'aide de $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et A.

    b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

    $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \;=\; A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

25. *a.* Démontrer que A admet deux valeurs propres complexes, notées λ et μ, que l'on précisera.

    b. Justifier l'existence de $r \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mu = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, et donner l'expression de r en fonction de α.

26. Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que

    $$A \;=\; P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}.$$

27. Démontrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ et déterminer P^{-1}.
28. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
29. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

    $$\begin{cases} x_n \;=\; r^n \left(\cos(n\theta)\, x_0 - \,\sin(n\theta)\, y_0\right), \\[2ex] y_n \;=\; r^n \left(\,\sin(n\theta)\, x_0 + \cos(n\theta)\, y_0\right). \end{cases}$$

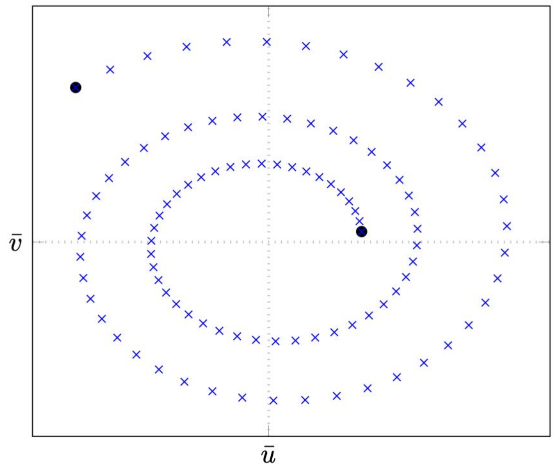
30. On propose dans la suite un modèle discret pour suivre l'évolution des populations de proies et de prédateurs.

    L'entier n désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine. Les tailles des populations de proies et de prédateurs sont respectivement données par les suites (u_n) et (v_n) définies par :

    $$\begin{cases} u_n = \bar{u} + x_n, \\ v_n = \bar{v} + y_n, \end{cases}$$

    où les réels strictement positifs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont fixés et correspondent à des tailles de référence pour les populations de proies et de prédateurs.

On a tracé sur le graphique ci-dessous les points de coordonnées (u_n, v_n) pour les premières valeurs de n comprises entre 0 et un entier N strictement positif.



Faire une description qualitative de l'évolution des populations de proies et de prédateurs prédite par le modèle.

31. On suppose que x_0 et y_0 ne sont pas tous les deux nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $x_n^2 + y_n^2$, en fonction de r, x_0, y_0 et en déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas être toutes les deux bornées. Discuter de la pertinence du modèle.