Correction Epreuve disciplinaire CAPLP 2022

Exercice 1

Partie A : Etude de f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow x(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq -1$. Donc $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

2. a) f fonction rationnelle donc f est dérivable sur D_f .

Pour tout x de D_f , $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{u(x)}$ alors $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}=-\dfrac{2x+1}{(x(x+1))^2}=\dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$.

b) $f'(x)$ est du signe de $-2x-1$.

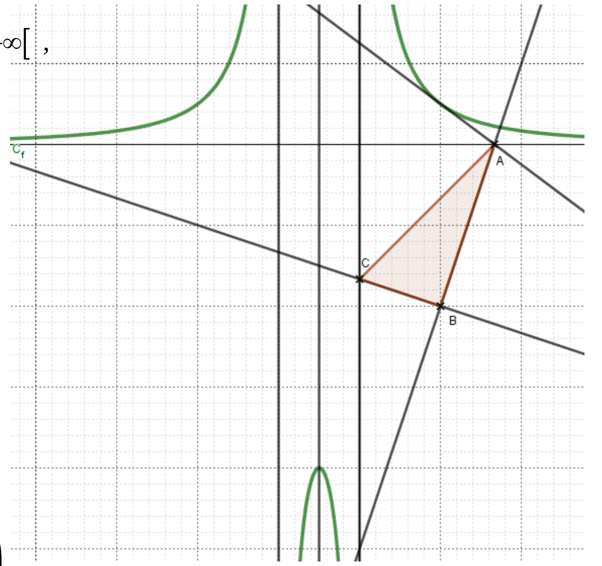
$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)}=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}}=-4$

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{2}$		0		$+\infty$
Signe de f '(x)		+	||	+	0	−	||	−	
Variations de f	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}=0$,

Comme $\lim\limits_{x\to-1}x(x+1)=\lim\limits_{x\to0}x(x+1)=0$ avec $x(x+1)>0$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$,

alors par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty$.



c) Asymptote horizontale d'équation y = 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.

Asymptotes verticales d'équation x = – 1 et x = 0.

d) Courbe ci contre.

3. La droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$ est axe de symétrie de C_f

car : - D_f symétrique par rapport à $-\dfrac{1}{2}$

- pour tout x de D_f , $f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)\left(\dfrac{1}{2}+x\right)}$

et $f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)\left(\dfrac{1}{2}-x\right)}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}+-x\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}=f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)$.

4. $T_1 : y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

5. $A(x;0)\in T_1\Leftrightarrow 0=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$. Donc $A\left(\dfrac{5}{3};0\right)$.

6. B(1 ; –2) : $x_A\neq x_B$ donc (AB) a une équation du type $y=mx+p$ avec $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2-0}{1-\dfrac{5}{3}}=-2\times\left(\dfrac{-3}{2}\right)=3$.

$B\in(AB)$ donc $y_B=3x_B+p\Leftrightarrow -2=3+p\Leftrightarrow -5=p$. Donc $(AB): y=3x-5$.

7. Deux droites sont orthogonales si et seulement si le produit de leur coefficient directeur respectif vaut – 1.

Donc la droite (D) orthogonale à (AB) passant par B a une équation du type $y=m'x+p'$ avec $3m'=-1\Leftrightarrow m'=-\dfrac{1}{3}$.

$B\in(D)$ donc $y_B=-\dfrac{1}{3}x_B+p'\Leftrightarrow -2=-\dfrac{1}{3}+p\Leftrightarrow -\dfrac{5}{3}=p$. Donc $(D): y=-\dfrac{1}{3}x--\dfrac{5}{3}$.

8. $(D): y=-\dfrac{1}{3}x--\dfrac{5}{3}$ donc $C\left(0;-\dfrac{5}{3}\right)$. **9.** (D) et (AB) orthogonales en B donc ABC rectangle en B.

$$A_{ABC}=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+2^2}\sqrt{1^2+\left(-2+\frac{5}{3}\right)^2}}{2}=\frac{\frac{2\sqrt{10}}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{3}}{2}=\frac{10}{9}\text{ u.a}$$

Partie B : Calcul intégral

9. a) Pour tout x de $]0;+\infty[$, $\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x+1}=\dfrac{\alpha(x+1)+\beta x}{x(x+1)}=\dfrac{(\alpha+\beta)x+\alpha}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

Par identification, $\alpha+\beta=0$ et $\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=1$ et $\beta=-1$. Donc pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

b) $F: x \mapsto \ln x-\ln(x+1)$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ sur $]0;+\infty[$.

10. $F: x \mapsto \ln x-\ln(x+1)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ primitive de f sur $]0;+\infty[$.

11. $\displaystyle\int_m^4 f(x)dx=\left[F(x)\right]_m^4=F(4)-F(m)=-\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)=-\ln\left(\frac{5}{4}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)=\ln\left(\frac{4}{5}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)=\ln\left(\frac{4}{5}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)$.

$$\int_m^4 f(x)dx=1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)=1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\left(1+\frac{1}{m}\right)=e \Leftrightarrow 1+\frac{1}{m}=\frac{5e}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{5e}{4}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{5e-4}{4} \Leftrightarrow m=\frac{4}{5e-4}.$$

Partie C : Equations différentielles

12. Soit h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=x\sin x$. Par intégration par parties, en posant $u(x)=x$ et $v'(x)=\sin x$

$$\int_a^b x\sin x dx=\left[-x\cos x\right]_a^b-\int_a^b -\cos x dx=\left[-x\cos x\right]_a^b+\int_a^b \cos x dx=\left[-x\cos x\right]_a^b+\left[\sin x\right]_a^b=\left[-x\cos x+\sin x\right]_a^b.$$

Donc $H: x \mapsto \sin x-x\cos x$ est une primitive de $h: x \mapsto x\sin x$ sur $]0;+\infty[$.

13. a) $y'+\dfrac{y}{x^2+x}=0 \Leftrightarrow y'+f(x)y=0 \Leftrightarrow y'=-f(x)y \Leftrightarrow y: x \mapsto Ce^{-F(x)}=Ce^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=C\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=C\dfrac{x+1}{x}\ (C\in\mathbb{R})$.

b) Méthode de variation de la constante : On cherche une solution particulière de (E) définie par $y_0(x)=C(x)\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

$$y_0 \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow C'(x)\left(\frac{x+1}{x}\right)+C(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x(x+1)}C(x)\left(\frac{x+1}{x}\right)=(x+1)\sin x$$

$$\Leftrightarrow C'(x)\left(\frac{x+1}{x}\right)=(x+1)\sin x \Leftrightarrow C'(x)=x\sin x \Leftrightarrow C(x)=\sin x-x\cos x+k.$$

Donc $y_0: x \mapsto C(x)\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=(\sin x-x\cos x)\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ solution particulière de (E).

Alors les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont $y: x \mapsto C\dfrac{x+1}{x}+y_0(x)=(\sin x-x\cos x+C)\dfrac{x+1}{x}\ \ (C\in\mathbb{R})$.

c) $u\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sin\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}+C\right)\dfrac{\frac{\pi}{2}+1}{\frac{\pi}{2}}=0 \Leftrightarrow 1+C=0 \Leftrightarrow C=-1$. Donc $u: x \mapsto (\sin x-x\cos x-1)\dfrac{x+1}{x}$.

Partie D : Etude d'une suite définie par récurrence.

14. $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ell(\ell+1)}=\ell \Leftrightarrow 1=\ell^2(\ell+1) \Leftrightarrow \ell^3+\ell^2-1=0$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		0		$+\infty$
Signe de k'(x)		+	0	−	0	+	
Variations de k	$-\infty$	$\nearrow$	$-23/27$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On définit k sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=x^3+x^2-1$.

k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$

k'(x) est du signe de a = 3 à l'extérieur des racines $-\dfrac{2}{3}$ et 0.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} k(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$

Sur $]-\infty;0[$ k a pour maximum $-\dfrac{23}{27}$ atteint en $-\dfrac{2}{3}$ donc k(x) < 0 sur $]-\infty;0[$.

Sur $[0;+\infty[$, k est continue et strictement croissante avec k(0) = – 1 < 0 et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k(x)=+\infty$.

Comme $0\in[-1;+\infty[$, l'équation k(x) = 0 admet une unique solution sur $[0;+\infty[$ d'après le théorème de la bijection.

Donc k(x) = 0 admet une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x)=x$ admet une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}$.

15. $k\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-1=-\dfrac{5}{8}<0$ et $k(1)=1>0$. Donc $k\left(\dfrac{1}{2}\right)<k(\ell)<k(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le\ell\le1$ car k croissante sur $[0;+\infty[$.

16. a)

x	0,5	0,75	0,75	0,75
y	1	1	0,875	0,8125
y – x	0,5 >2×0,05	0,25 >2×0,05	0,125 >2×0,05	0,0625<2×0,05
c	0,75	0,875	0,8125	
g(c) = f(c) - c	Positif	Négatif	Négatif	

On trouve en sortie : $\frac{x+y}{2}=\frac{0,75+0,8125}{2}=0,78125$.

b) L'algorithme donne en sortie une valeur approchée à 0,05 près de la solution ℓ de l'équation $f(x)=x$.

c) A chaque itération, on passe de [x ; y] à [c ; y] ou [x ; c] avec c milieu de [x ;y], donc on coupe l'intervalle en 2.

Donc on bout de n itération, l'intervalle a une longueur $\frac{y-x}{2^n}$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y-x}{2^n}=0$, nécessairement $\frac{y-x}{2^n}<2$eps pour un certain n.

17. Soit φ définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(x)=f\circ f(x)-x$. **a)** $\varphi(\ell)=f\circ f(\ell)-\ell=f(f(\ell))-\ell=f(\ell)-\ell=\ell-\ell=0$.

b) $\varphi(x)=f\circ f(x)-x=\dfrac{1}{\frac{1}{x(1+x)}\left(\frac{1}{x(1+x)}+1\right)}-x=\dfrac{x^2(1+x)^2}{1(1+x(x+1))}-x=\dfrac{x^2(x^2+2x+1)-x(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=\dfrac{x(x^3+x^2-1)}{x^2+x+1}$.

$\varphi(x)$ est donc du signe de $k(x)=x^3+x^2-1$ car $x^2+x+1>0$ et $x>0$ sur $]0;+\infty[$.

D'après le tableau de variations établi en **14.** k est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $k(\ell)=0$.

Donc $k(x)<0$ sur $]0;\ell[$ et $k(x)>0$ sur $]\ell;+\infty[$ et de même pour $\varphi(x)$

x	0 ℓ $+\infty$
Signe de $\varphi(x)$	– 0 +

18. Partie directe : Supposons $u_0\in D_f$. Démontrons par récurrence sur n non nul, $P(n)$: u_n existe et $u_n\in D_f$.

Initialisation : P(1) est vrai car $u_0\in D_f$ donc $u_1=f(u_0)$ existe et $u_1\in D_f$ car d'après le tableau de variation établi en **2. b)**

$$f(D_f)=f(]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[)=]-\infty;-4]\cup]0;+\infty[\subset D_f$$

Hérédité : Supposons P(n) vrai pour un entier n non nul fixé.

Alors $u_n\in D_f$ donc $u_{n+1}=f(u_n)$ existe et $u_{n+1}\in D_f$ puisque $f(D_f)\subset D_f$.

Conclusion : P(1) vrai et P(n) héréditaire pour tout entier n non nul donc P(n) vrai pour tout entier n non nul.

Donc si $u_0\in D_f$, (u_n) définie.

Réciproquement : si $u_0\notin D_f$ alors $u_1=f(u_0)$ n'existe pas donc (u_n) non définie

19. On suppose $u_0\in]0;+\infty[$.

a) $u_0\in]0;+\infty[\subset D_f$ donc (u_n) définie d'après **18.** et avec la même récurrence que (u_n) positive car $f(]0;+\infty[)=]0;+\infty[$.

b) Si $u_0\in]0;\ell[$, démontrons par récurrence sur n, $P(n)$: $u_{2n+2}<u_{2n}<\ell$ et $u_{2n+3}>u_{2n+1}>\ell$.

Initialisation : P(0) est vrai car d'une part $u_0\in]0;\ell[$ donc $\varphi(u_0)<0\Leftrightarrow f\circ f(u_0)-u_0<0\Leftrightarrow u_2<u_0<\ell$

et d'autre part, $u_0<\ell$ donc $f(u_0)>f(\ell)\Leftrightarrow u_1>\ell$ donc $\varphi(u_1)>0\Leftrightarrow f\circ f(u_1)-u_1>0\Leftrightarrow u_3>u_1>\ell$.

Hérédité : Supposons P(n) vrai pour un entier naturel n fixé.

$u_{2n}\in]0;\ell[$ donc $\varphi(u_{2n})<0\Leftrightarrow f\circ f(u_{2n})-u_{2n}<0\Leftrightarrow u_{2n+2}<u_{2n}<\ell$

et $u_{2n+1}>\ell$ donc $\varphi(u_{2n+1})>0\Leftrightarrow f\circ f(u_{2n+1})-u_{2n+1}>0\Leftrightarrow u_{2n+3}>u_{2n+1}>\ell$

Conclusion : P(0) vrai et P(n) héréditaire pour tout entier naturel n donc P(n) vrai pour tout entier naturel n.

Donc si $u_0\in]0;\ell[$, (u_{2n}) décroissante et strictement bornée par 0 et ℓ et (u_{2n+1}) croissante et strictement minorée par ℓ.

Avec la même récurrence : si $u_0\in]\ell;+\infty[$, (u_{2n+1}) décroissante et bornée par 0 et ℓ et (u_{2n}) croissante et minorée par ℓ.

c) Si $u_0=\ell$, (u_n) est constante et convergente vers ℓ.

Si $u_0>\ell$, (u_n) diverge

car (u_{2n}) croissante et strictement supérieur à ℓ, tandis que (u_{2n+1}) décroissante et strictement inférieure à ℓ.

Si $u_0<\ell$, (u_n) diverge

car (u_{2n+1}) croissante et strictement supérieur à ℓ, tandis que (u_{2n}) décroissante et strictement inférieure à ℓ.

20. Si $u_0\in]-\infty;0[$ alors $u_2\in]0;+\infty[$ avec $u_2\neq\ell$: on revient au cas précédent avec u_2 à la place de u_0 donc (u_n) diverge.

Exercice 2

1. La population a augmenté de 10 % en 4 ans donc elle a augmenté de 2,5 % par an en moyenne →**FAUX**

1^e méthode : Une augmentation globale sur 4 ans de 10 % correspond à un $CM_{global} = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$

donc $CM_{moyen} = \sqrt[4]{1,1} \approx 1,024$ à 10^{-3} près soit une augmentation moyenne de 2,4 % par an.

2^e méthode : Une augmentation de 2,5 % par an correspond à un $CM_{moyen} = 1,025$

donc $CM_{global} = 1,025^4 \approx 1,104$ à 10^{-3} près soit une augmentation globable de 10,4 %.

2. Soit f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ →**FAUX**

Pour x non nul, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ donc $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ →**VRAI**

Démontrons par récurrence sur n non nul, $P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation : P(1) est vrai car $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2 = \sum_{k=1}^{1} k^2$.

Hérédité : Supposons P(n) vrai pour un entier n non nul fixé

et montrons qu'alors P(n + 1) est vraie c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} .$$

car $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$.

Conclusion : P(1) vrai et P(n) héréditaire pour tout entier n non nul donc P(n) vrai pour tout entier n non nul.

4. La probabilité de tirer simultanément 2 boules de couleurs différentes dans une urne avec 6 bleues et 3 rouges est $\frac{1}{2}$ →**VRAI**

Equiprobabilité donc $p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\binom{6}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{6\times 3}{36} = \frac{1}{2}$.

5. $Z = X + Y \sim N(44;6)$ quand X et Y variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim N(24;4)$ et $Y \sim N(20;2)$ → **FAUX**

Les lois normales sont stables par additivité, c'est-à-dire que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois normales est elle-même une variable aléatoire de loi normale, qui a pour espérance la somme des espérances et pour variance la somme des variances (c'est-à-dire $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ et ${\sigma_Z}^2 = V_Z = V_X + V_Y = {\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2$ et par conséquent $\sigma_Z = \sqrt{{\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2} \neq \sigma_X + \sigma_Y$)

Donc si $X \sim N(24;4)$ et $Y \sim N(20;2)$ avec X et Y indépendantes alors $Z = X + Y \sim N\left(24+20; \sqrt{4^2+2^2}\right) = N\left(44; 2\sqrt{5}\right)$.

6. Pour tout réel θ, $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Alors il existe un réel θ tel que $(M(\theta))^4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ **VRAI**

$$(M(\theta))^2=M(\theta)\times M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta\\ 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & -\sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\end{pmatrix}=M(2\theta)$$

donc $(M(\theta))^4=(M(\theta))^2\times(M(\theta))^2=M(2\theta)\times M(2\theta)=M(4\theta)=\begin{pmatrix}\cos(4\theta) & -\sin(4\theta)\\ \sin(4\theta) & \cos(4\theta)\end{pmatrix}$.

$(M(\theta))^4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 4\theta=-1\\ \sin 4\theta=0\end{cases}\Leftrightarrow 4\theta=\pi[2\pi]\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Donc par exemple, $\theta=-\frac{3\pi}{4}$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ ou $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

7. Soient $A(0;1)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$ et G barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$. Alors $G(2;-3)$ $\rightarrow$**FAUX**

Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$ alors pour M = O, $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Donc $x_G=\frac{1}{2}x_A-\frac{1}{2}x_B+x_C=1$ et $y_G=\frac{1}{2}y_A-\frac{1}{2}y_B+y_C=-\frac{3}{2}$.

8. D droite passant par $A(-1;1;0)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1,0,1)$ est tangente à S sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=3$. $\rightarrow$**FAUX**

1e méthode : S est la sphère de centre O(0 ;0 ;0) et de rayon $\sqrt{3}$. Or $OA=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}<\sqrt{3}$.

Comme la distance de O à la droite D est inférieure ou égale à OA, d(O,D) $\leq\sqrt{2}<\sqrt{3}$
alors la droite est sécante et non tangente à la sphère.

2e méthode : S est la sphère de centre O(0 ;0 ;0) et de rayon $\sqrt{3}$.

Déterminons le projeté orthogonal H de O sur D puis OH la distance du point O à la droite D.

Soit P le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{u}(1,0,1)$ donc orthogonal à D. $M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow x+z=0$.

$$M(x;y;z)\in D\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=k\vec{u}\ (k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\end{cases}\ (k\in\mathbb{R}).$$

$$H(x;y;z)\in P\cap D\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\\ x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\\ (k-1)+k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\\ k=1/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/2\\ y=1\\ z=1/2\\ k=1/2\end{cases}$$

. Donc le projeté orthogonal de O sur D est $H\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.

Alors $d(O;D)=OH=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}<\sqrt{3}$

Comme la distance de O à D est inférieure au rayon de la sphère, la droite est sécante et non tangente à la sphère.

3e méthode : $M(x;y;z)\in D\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=k\vec{u}\ (k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$.

$$M(x;y;z)\in D\cap S\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\\ x^2+y^2+z^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\\ (k-1)^2+1^2+k^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\\ (k-1)^2+1^2+k^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k-1\\ y=1\\ z=k\\ 2k^2-2k-1=0\end{cases}$$

L'équation $2k^2-2k-1=0$ admet 2 solutions : $k_1=1+\sqrt{3}$ et $k_2=1-\sqrt{3}$ donc D coupe S en deux points d'intersection.