Correction Epreuve disciplinaire CAPLP 2023

<u>Exercice 1</u>

1. Pour le consommateur, une réduction tarifaire de 20% est préférable à 24 % de produit en plus pour le prix initial →**VRAI**

Soit x le prix initial et y la quantité initiale pour un rapport prix par unité de quantité de $\frac{x}{y}$ (€ / kg par exemple).

Après réduction tarifaire de 20 %, le prix est 0,8x pour une quantité y, soit un rapport de $0{,}8\frac{x}{y}$ (€ / kg).

Après hausse de 24% de la quantité, le prix est x pour une quantité 1,24y soit un rapport $\frac{1}{1{,}24}\frac{x}{y} \approx 0{,}8065\frac{x}{y}$ à 10^{-3} près (€ / kg).

Donc la réduction tarifaire est légèrement plus intéressante avec un prix par unité de quantité légèrement moindre.

2. Il y a 28 dominos différents (dominos = deux cases contenant un nombre de points entre 0 et 6) →**VRAI**

1e méthode : Il y a $\binom{7}{2} = 21$ dominos « non doubles » (c'est-à-dire avec deux cases contenant un nombre différent de points) et 7 dominos « doubles » (c'est-à-dire avec deux cases ayant le même nombre de points). Donc 21 + 7 = 28 en tout.

2e méthode : Il y a 7 dominos avec au moins un six, puis plus que 6 avec au moins un cinq (sans compter celui déjà compté), puis 5 avec au moins un quatre (sans compter ceux déjà compté) …. jusqu'à 1 seul pour le « double zéro ».

Soit 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = $\frac{(7+1)\times 7}{2} = 28$.

3e méthode : On peut aussi présenter les résultats sous la forme d'un tableau à double entrée 7×7 dont on enlève la partie inférieure à la diagonale pour éviter les doublons. On obtient également 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =28.

3. Soit (u_n) la suite définie par u_0 =1,5 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{+1} = \frac{2}{3-u_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le 2$. →**VRAI**

Démontrons par récurrence sur n, $P(n) : 1 \le u_n \le 2$,

sachant que $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{2}{3-x}$ avec f croissante sur $]-\infty;3[$ $\left(\text{car } f'(x) = \frac{-2(-1)}{(3-x)^2} = \frac{2}{(3-x)^2} > 0 \right)$

Initialisation : P(0) est vrai car $u_0 = 1{,}5 \in [1;2]$.

Hérédité : Supposons P(n) vrai pour un entier naturel n fixé et montrons qu'alors P(n + 1) est vraie c'est-à-dire $1 \le u_{n+1} \le 2$

$1 \le u_n \le 2$ alors $f(1) \le f(u_n) \le f(2)$ car f croissante sur $]-\infty;3[$.

Or $f(1) = 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = 2$ donc $1 \le u_{n+1} \le 2$.

Conclusion : P(0) vrai et P(n) héréditaire pour tout entier naturel n donc P(n) vrai pour tout entier naturel n.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit f_k sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x - 2 + ke^{-x}$.

Les points A_k correspondants au minimum sur chaque courbe C_k de f_k sont alignés →**VRAI**

f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = 1 - ke^{-x}$. $f_k'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 1 - ke^{-x} \ge 0 \Leftrightarrow e^{-x} \le \frac{1}{k} \Leftrightarrow -x \le \ln\left(\frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow -x \le -\ln k \Leftrightarrow x \ge \ln k$.

Le minimum de C_k est atteint en $x_k = \ln k$ et vaut $y_k = f(\ln k) = \ln k - 2 + ke^{-\ln k} = \ln k - 2 + k\frac{1}{k} = \ln k - 2 + 1 = \ln k - 1 = x_k - 1$.

donc tous les points A_k appartiennent à la droite d'équation y = x – 1.

5. Un sujet est créé par L, N ou G avec 35 % par L et 40 % par N. 20 % des sujets de L, la moitié des sujets de N et 80 % des sujets de G traitent de la relativité. Le sujet traite de la relativité. La probabilité qu'il ait été écrit par N est 0,40 → **FAUX**

On note L l'événement « le sujet est créé par L », de même pour N et G. On note R : « Le sujet traite de relativité ».

N, G et L partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(L)\times P_L(R) + P(N)\times P_N(R) + P(G)\times P_G(R) = 0{,}35\times 0{,}20 + 0{,}40\times 0{,}5 + 0{,}25\times 0{,}80 = 0{,}47.$$

Alors $P_R(N) = \frac{P(R\cap N)}{P(R)} = \frac{P(N)\times P_N(R)}{P(R)} = \frac{0{,}40\times 0{,}5}{0{,}47} = \frac{20}{47} \approx 0{,}426$ à 10^{-3} près et non 0,40.

6. f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie : pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$. Alors f est la fonction identité →**VRAI**

On peut remarquer que : - pour tout réel x, $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

- pour tout réel x, $0 = f(0) = f(x-x) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$.

Alors pour $h \ne 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)+f(-x)}{h} = \frac{f(x+h-x)}{h} = \frac{f(h)}{h}$ donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 1$.

f est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée égale à 1. C'est donc la fonction identité [car f(x) = x + k avec f(0) = 0].

7. Il existe une solution de l'équation différentielle (E) : 4y'' – 12y' + 9y = 1 qui est strictement négative sur $\mathbb{R}$ → **FAUX**

(EH) : 4y'' – 12y' + 9y = 0 a pour équation caractéristique $4r^2-12r+9=0 \Leftrightarrow r^2-3r+\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow \left(r-\frac{3}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow r=\frac{3}{2}$.

Les solutions de (EH) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(Ax+B)e^{1,5x}$ avec A et B réels.

Une solution particulière) constante (égale à C) de E vérifie 9C=1 donc $C=\frac{1}{9}$.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=f(x)+C=(Ax+B)e^{1,5x}+\frac{1}{9}$ avec A et B réels.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(Ax+B)e^{1,5x}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}>0$ $\left(\text{par croissance comparée car } \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0\right)$ quelques soient les valeurs de A et B.

Donc aucune des fonctions solutions de (E) n'est strictement négative sur $\mathbb{R}$ car positive au voisinage de $-\infty$.

8. Dans le plan, le point $A(3;6)$ de la droite d d'équation paramétrique $\begin{cases} x=1-2t \\ y=5-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ est le point le plus proche du cercle C de centre $\Omega(5;2)$ et de rayon 4 →**VRAI**

Le point de la droite le plus proche du cercle C est le projeté orthogonale de Ω sur d.

On constate que d est la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ passant par A (en prenant t = – 1) et que $\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{A\Omega}\cdot\vec{u}=4-4=0$: A est le projeté orthogonale de Ω sur d et donc le point de d le plus proche de C.

9. La suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}$ est décroissante, minorée par 0 et convergente vers 0 →**VRAI**

Démontrons par récurrence sur n, $P(n): 0\le u_{n+1}\le u_n\le 2$,

sachant que $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f: x\mapsto \frac{x}{1+x}$ avec f croissante sur $]-1;+\infty[$ $\left(\text{car } f'(x)=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}>0\right)$

Initialisation : P(0) est vrai car $u_0=2$ et $u_1=\frac{2}{3}$ donc $0\le u_1\le u_0\le 2$.

Hérédité : Supposons P(n) vrai pour un entier naturel n fixé et montrons P(n + 1) vraie c'est-à-dire $0\le u_{n+2}\le u_{n+1}\le 2$

$0\le u_{n+1}\le u_n\le 2$ alors $f(0)\le f(u_{n+1})\le f(u_n)\le f(2)$ car f croissante sur $]-1;+\infty[$.

Or $f(0)=0$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$, $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(2)=\frac{2}{3}<2$ donc $0\le u_{n+2}\le u_{n+1}\le 2$.

Conclusion : P(0) vrai et P(n) héréditaire pour tout entier naturel n donc P(n) vrai pour tout entier naturel n.

La suite (u_n) est décroissante été minorée par 0 donc convergente vers un réel L positif ou nul.

Par ailleurs, comme f est continue sur $]-1;+\infty[$, L solution de l'équation $f(x)=x$.

$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x}{1+x}=x \Leftrightarrow x=x(1+x) \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ L = 0 et donc la suite (u_n) converge vers 0.

10. La matrice $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$ est diagonalisable →**FAUX**

$\det(A-XI)=\begin{vmatrix}2-X&0\\1&2-X\end{vmatrix}=(2-X)^2$ donc 2 valeur propre double (A diagonalisable si $\dim E_2=2$, trigonalisable sinon)

$U\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E_2 \Leftrightarrow (A-2I)U=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=0.$

Alors E_2 est une droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ donc un espace vectoriel de dimension 1. Donc A n'est pas diagonalisable.

11. « Si deux matrices B et C de taille 3×3 sont égales, alors pour toute matrice A de taille 3×3, on a A × B = A × C »

La proposition réciproque est vraie →**VRAI**

La proposition réciproque est :

«Soient deux matrices B et C de taille 3×3. Si pour toute matrice A de taille 3×3, on a A × B = A × C, alors B et C sont égales »

cette proposition est vraie car si pour toute matrice A de taille 3×3, on a A × B = A × C, c'est le cas en particulier pour A = I et dans ce cas, $A\times B=A\times C \Leftrightarrow I\times B=I\times C \Leftrightarrow B=C$.

Exercice 2 **Partie 1 : la fonction sinus**

1. Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, M_x est le point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM_x}\right)$,

cos x est l'abscisse du point M_x et sin x son ordonnée. Et pour tout réel x, $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

2. Soit ABC un triangle tel que $CB=\alpha$, $CA=\beta$ et $ACB=\theta$.

$A_{ABC}=\dfrac{\text{Base}\times\text{Hauteur}}{2}=\dfrac{CA\times BH}{2}$ où H est la base de la hauteur issue de B alors $A_{ABC}=\dfrac{\beta\alpha\sin\theta}{2}$

car dans le triangle CBH rectangle en H, $\sin\theta=\dfrac{BH}{CB}\Leftrightarrow BH=CB\sin\theta=\alpha\sin\theta$.

3. D'après la question précédente, $A_{ACH}=\dfrac{uv\sin a}{2}$, $A_{ABH}=\dfrac{vw\sin b}{2}$ et $A_{ACB}=\dfrac{uw\sin(a+b)}{2}$.

Par ailleurs, $A_{ACB}=A_{ACH}+A_{ABH}\Leftrightarrow\dfrac{uw\sin(a+b)}{2}=\dfrac{uv\sin a}{2}+\dfrac{vw\sin b}{2}\Leftrightarrow\sin(a+b)=\dfrac{uv\sin a}{uw}+\dfrac{vw\sin b}{uw}$

$$\Leftrightarrow\sin(a+b)=\frac{v}{w}\sin a+\frac{v}{u}\sin b\Leftrightarrow\sin(a+b)=\cos b\sin a+\cos a\sin b$$

car dans le triangle ABH rectangle en H, $\cos b=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{w}{v}$ et dans le triangle ACH rectangle en H, $\cos a=\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{u}{v}$.

4. Pour tous réels a et b, $\sin a\cos b+\sin b\cos a=\dfrac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\times\dfrac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}+\dfrac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}\times\dfrac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$

$$=\frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}-e^{-i(a+b)}+e^{i(a+b)}+e^{-i(a-b)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a+b)}}{4i}=\frac{2e^{i(a+b)}-2e^{-i(a+b)}}{4i}=\frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i}=\sin(a+b).$$

Partie 2 : Etude d'une fonction

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^5(x)$ et C sa courbe représentative

5. a) La fonction sin est 2π-périodique et impaire sur $\mathbb{R}$: $\sin(-x)=-\sin(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ pour tout réel x.

Alors $f(-x)=(\sin(-x))^5=(-\sin(x))^5=-(\sin(x))^5=-f(x)$ et $f(x+2\pi)=(\sin(x+2\pi))^5=(\sin(x))^5=f(x)$ pour tout réel x.

Donc f est 2π-périodique et impaire sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (axe des sinus).

Alors pour tout $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\right)^5=\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)\right)^5=f\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$.

c) f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ donc on peut réduire l'étude à $[-\pi;\pi]$ et obtenir le reste de la courbe par translations successives.

f est impaire sur $\mathbb{R}$ donc on peut réduire l'étude à $[0;\pi]$ et obtenir la courbe sur $[-\pi;0]$ par symétrie par rapport à O.

Pour tout $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$, donc on peut réduire l'étude à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

et obtenir la courbe sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$.

6. f est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=5\cos(x)\sin^4(x)\geq 0$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc f est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\pi/2$
Signe de f '(x)	0	+	0
Variation de f	0	↗	1

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
Signe de f '(x)	0	–	0	+	0	+	0	–	0
Variation de f	0	↘	-1	↗		↗	1	↘	0

7. $f'(0)=f(0)=0$ donc $T_0 : y=0$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ donc $T_{\frac{\pi}{2}} : y=1$.

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5=\frac{5\sqrt{2}}{8}\text{ et }f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5=\frac{\sqrt{2}}{8}\text{ donc }T_{\frac{\pi}{4}} : y=\frac{5\sqrt{2}}{8}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{8}x+\frac{\sqrt{2}}{8}\left(1-\frac{5\pi}{4}\right).$$

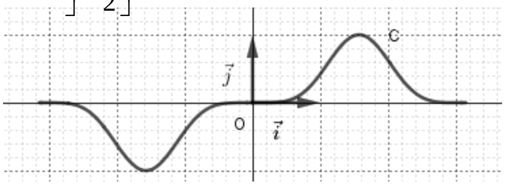
8. f ’est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f''(x)=-5\sin^5 x+20\cos^2 x\sin^3 x=5\sin^3 x\left(-\sin^2 x+4\cos^2 x\right)=5\sin^3 x\left(\cos^2 x-1+4\cos^2 x\right)$

$=5\sin^3(x)\left(5\cos^2(x)-1\right)$. Sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x)>0$ et $\cos(x)\geq 0$ avec cos décroissante.

Sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$: $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 5\cos^2(x)-1\geq 0 \Leftrightarrow \cos^2(x)\geq\frac{1}{5}\Leftrightarrow \cos(x)\geq\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow x\leq \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ car cos décroissante.

Donc sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ f a un unique point d’inflexion en $x=\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ [car f'' s’annule et change de signe en $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$].

9.



10. Avec la méthode des rectangles, on obtient l’encadrement suivant :

$$\sum_{i=0}^{4}\frac{\pi}{10}f\left(\frac{i\pi}{10}\right)\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx\leq\sum_{i=1}^{5}\frac{\pi}{10}f\left(\frac{i\pi}{10}\right)$$

car chaque rectangle a pour largeur $\frac{\pi}{10}$ et pour hauteur $f\left(\frac{i\pi}{10}\right)$

avec i de 0 à 4 pour les rectangles sous la courbe (minoration) et i de 1 à 5 pour les rectangles au-dessus de la courbe (majoration).

$$\sum_{i=0}^{4}\frac{\pi}{10}f\left(\frac{i\pi}{10}\right)=\frac{\pi}{10}\left(\sin^5\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^5\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\sin^5\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\approx 0{,}38 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

et $\sum_{i=1}^{5}\frac{\pi}{10}f\left(\frac{i\pi}{10}\right)=\frac{\pi}{10}\left(\sum_{i=0}^{4}f\left(\frac{i\pi}{10}\right)+\sin^5\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\approx 0{,}69$ à 10^{-2} près.

11. Pour compléter le programme Python, il faut ajouter l’aire du rectangle de largeur $\frac{\pi}{10}$ et de hauteur $\sin^5\left(\frac{k\pi}{10}\right)$ donc TEXTE = pi/10*(sin(k*pi/10))**5

```
def integrale(n):
    aire = 0
    for k in range(n) :
        aire = aire + pi/10*(sin(k*pi/10))**5
    return aire
```

Partie 3 : Les intégrales de Wallis

Soit (S_n) la suite d'intégrales définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx$.

12. a) $S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$. $\quad S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx=\left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)=1$.

b) Pour tout réel x, $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$ donc $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$.

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos(2x)\right)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(\pi)}{2}\right)-\left(0-\frac{\sin(0)}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

c) Pour tout réel x, $\sin^3(x)=\sin(x)\times\sin^2(x)=\sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)=\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)$.

$$S_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)\right)dx=\left[-\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0-\left(-\cos(0)+\frac{\cos^3(0)}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

13. a) Pour tout réel $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leq\sin(x)\leq 1$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq\sin(x)\times\sin^n(x)\leq\sin^n(x)\Leftrightarrow 0\leq\sin^{n+1}(x)\leq\sin^n(x)$.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leq\sin^{n+1}(x)\leq\sin^n(x)$ donc $0\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}(x)\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx\Leftrightarrow 0\leq S_{n+1}\leq S_n$.

(S_n) décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel L positif ou nul.

14. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(x)\,dx=\left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\sin^n(x)\,dx$

par IPP, en posant $u(x)=\sin^{n+1}(x)$ et $v'(x)=\sin(x)$ [donc $u'(x)=(n+1)\cos(x)\sin^n(x)$ et $v(x)=-\cos(x)$]

Donc $S_{n+2}=0+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2(x)\right)\sin^n(x)\,dx=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(x)\,dx=(n+1)S_n-(n+1)S_{n+2}$

$S_{n+2}=(n+1)S_n-(n+1)S_{n+2}\Leftrightarrow(n+2)S_{n+2}=(n+1)S_n\Leftrightarrow S_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}S_n$.

b) Soit (R_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $R_n = (n+1)S_nS_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = (n+2)S_{n+1}S_{n+2} = (n+2)S_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}S_n = (n+1)S_nS_{n+1} = R_n$ donc (R_n) constante égale à $R_0 = S_0S_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)S_nS_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)L^2$

Cela impose $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = L = 0$ car si $L \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)L^2 = +\infty$ et non $\dfrac{\pi}{2}$.

15. a) $S_3 = \dfrac{2}{3}S_1 = \dfrac{2}{3}$. **b)** Pour tout n, $S_2 = \dfrac{1}{2}S_0$, $S_4 = \dfrac{3}{4}S_2$ ... $S_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}S_{2n-2}$ et $S_3 = \dfrac{2}{3}S_1$, $S_5 = \dfrac{4}{5}S_3$ ... $S_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}S_{2n-1}$

donc $S_{2n} = \dfrac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2}S_0 = \dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{(2n-1)\times\ldots\times3\times1}{2n\times\ldots\times4\times2}$ et $S_{2n+1} = \dfrac{2n\times\ldots\times4\times2}{(2n+1)\times\ldots\times5\times3}S_1 = \dfrac{2n\times\ldots\times4\times2}{(2n+1)\times\ldots\times5\times3}$.

Partie 4 : Une loi de probabilité

Soit g définie sur $[0;\pi]$ par $g(x) = \dfrac{15}{16}\sin^5(x)$ et Γ sa courbe représentative.

16. a) Formule du binôme de Newton : Pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

b) $\left(e^{it}-e^{-it}\right)^5 = \left(e^{it}+\left(-e^{-it}\right)\right)^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(e^{it}\right)^{n-k}\left(-e^{-it}\right)^k = e^{5it}-5e^{3it}+10e^{it}-10e^{-it}+5e^{-3it}-e^{-5it}$ pour tout réel t.

c) Pour tout réel x, $\sin^5(x) = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \dfrac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5}{32i} = \dfrac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i}$

$= \dfrac{1}{16}\dfrac{\left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right)-5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{2i} = \dfrac{1}{16}\left(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\right) = \dfrac{1}{16}\sin(5x)-\dfrac{5}{16}\sin(3x)+\dfrac{5}{8}\sin(x)$.

d) G définie sur $[0;\pi]$ par $G(x) = \dfrac{15}{16}\left(-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos(5x)}{5}+\dfrac{5}{16}\dfrac{\cos(3x)}{3}-\dfrac{5}{8}\cos(x)\right)$ est une primitive de g sur $[0;\pi]$.

17. a) $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)dx = \left[G(x)\right]_0^{\pi} = G(\pi)-G(0) = -2G(0)$ $\left[\text{car } G(\pi) = -G(0)\right]$

$= \dfrac{15}{16}\times2\left(\dfrac{1}{16}\times\dfrac{1}{5}-\dfrac{5}{16}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{30}{16^2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{5}{3}+10\right) = \dfrac{30}{16^2}\left(\dfrac{3-25+150}{15}\right) = \dfrac{30}{256}\left(\dfrac{128}{15}\right) = 1$.

b) g est une fonction de densité sur $[0;\pi]$ car g est positive et continue sur $[0;\pi]$ avec $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)dx = 1$.

18. On note X la variable aléatoire de densité g et P la probabilité associée définie sur $[0;\pi]$ par $P(X \le t) = \displaystyle\int_0^{t} g(x)dx$.

On a vu en **5. b)** que pour tout $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$ donc $g\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right) = g\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$.

La courbe Γ admet donc la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie ce qui implique $P\left(X \le \dfrac{\pi}{2}\right) = P\left(X \ge \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Alors $1 = P(X \le \pi) = \displaystyle\int_0^{\pi} g(x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx \Leftrightarrow P\left(X \le \dfrac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = 0,5$. Donc $P\left(X \le \dfrac{\pi}{2}\right) = P\left(X \ge \dfrac{\pi}{2}\right) = 0,5$.

19. On sait que $P\left(X \le \dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0,02$. $P\left(\dfrac{\pi}{2} \le X \le \dfrac{3\pi}{4}\right) = P\left(\dfrac{\pi}{4} \le X \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ par symétrie de Γ par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$0,5 = P\left(0 \le X \le \dfrac{\pi}{2}\right) = P\left(0 \le X \le \dfrac{\pi}{4}\right)+P\left(\dfrac{\pi}{4} \le X \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $P\left(\dfrac{\pi}{2} \le X \le \dfrac{3\pi}{4}\right) = P\left(\dfrac{\pi}{4} \le X \le \dfrac{\pi}{2}\right) = 0,5-P\left(0 \le X \le \dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0,48$.

20. p définie par $p(t) = P(X \le t)$ est continue et strictement croissante sur $[0;\pi]$ avec $p\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0,02$ et $p\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,5$

alors d'après le théorème de la bijection, l'équation $p(t) = 0,3$ admet une unique solution $t_0 \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc il existe un unique $t_0 \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $P(X \le t_0) = 0,3$.

21. $P(X \le t) = \int_0^t g(x)dx = [G(x)]_0^t = \frac{1}{2} + \frac{15}{16^2}\left(-\frac{\cos(5t)}{5} + \frac{5\cos(3t)}{3} - 10\cos(t)\right)$. Avec la calculatrice $t_0 \approx 1{,}35$ à 10^{-2} près .

22. a) Par IPP, en posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(kx)$, on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{\cos(kx)}{k}$ pour tout réel k non nul,

$$\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = \left[-\frac{x\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}dx = -\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \left[-\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi\cos(k\pi)}{k}.$$

b) $E(X) = \int_0^{\pi} xg(x)dx = \frac{15}{16}\int_0^{\pi} x\sin^5(x)dx = \frac{15}{16}\int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x)\right)dx$

$$= \frac{15}{16^2}\left(\int_0^{\pi} x\sin(5x)dx - 5\int_0^{\pi} x\sin(3x)dx + 10\int_0^{\pi} x\sin(x)dx\right) = \frac{15}{16^2}\left(-\frac{\pi\cos(5\pi)}{5} + 5\frac{\pi\cos(3\pi)}{3} - 10\pi\cos(\pi)\right)$$

$$= \frac{15}{16^2}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{5\pi}{3} + 10\pi\right) = \frac{15}{16^2}\left(\frac{126\pi}{15}\right) = \frac{\pi}{2}.$$