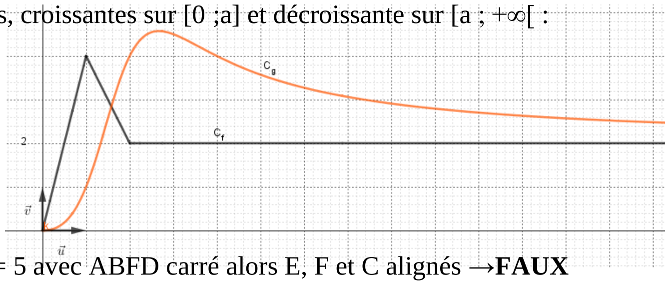
**Correction Epreuve disciplinaire CAPLP 2024**

__Exercice 1__

**1.** Soit f une fonction continue sur [0 ; +∞[ telle que f(0) = 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors f croissante sur [0 ; +∞[ →**FAUX**

On peut trouver des contre-exemples de fonctions vérifiant les conditions, croissantes sur [0 ;a] et décroissante sur [a ; +∞[ :

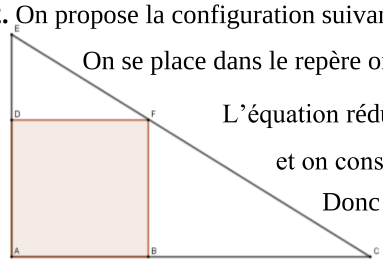



- f affine par morceaux : f définie par f(x) = $\begin{cases} 4x \text{ sur } [0\,;1[ \\ -2x+6 \text{ sur } [1\,;2[ \\ 2 \text{ sur } [2\,;+\infty[ \end{cases}$

f décroissante sur [1 ;2[.

- g définie sur [0 ; +∞[ par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-3x+4}$. g décroissante sur $\left[\frac{8}{3};+\infty\right[$ .

**2.** On propose la configuration suivante où AB = 8, BC = 13, AD = 8, DE = 5 avec ABFD carré alors E, F et C alignés →**FAUX**




On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|}\right)$ dans lequel : A(0 ;0), B(8 ;0), C(21 ;0), D(0 ;5), E(0 ;13) et F(8 ;8).

L'équation réduite de la droite (EC) est $y = -\frac{13}{21}x + 13$

et on constate que F n'appartient pas à (EC) car $-\frac{13}{21} \times 8 + 13 = \frac{169}{21} \neq \frac{168}{21} = 8$

Donc E, F et C non alignés

**3.** Soit f définie sur ]0 ; Π[ par $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$ →**VRAI** .

On peut utiliser les DL en 0 à l'ordre 2 de cos et sin : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sin(x) = x + o(x^2)$.

Alors $f(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$.

**4.** Soit f définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ alors f n'est définie que pour x > 1→**FAUX.**

f définie en x ⇔ $x^2 + 2x - 3 > 0$ : $\Delta = 16$ et les racines sont $-3$ et 1.

$x^2 + 2x - 3$ est du signe de a = 1 à l'extérieur des racines – 3 et 1 donc f définie pour x < – 3 et pour x > 1.

**5.** Soit l'équation diff. (E) : y'' – 2y' + y = 0 alors toute solution de (E) sur ℝ est de la forme $x \mapsto \lambda x e^x$ avec λ réel →**FAUX.**

y'' – 2y' + y = 0 a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur ℝ par $f(x) = (\lambda x + \beta)e^x$ avec λ et β réels.

**6.** Soit la matrice M = $\begin{pmatrix} -1 & -x \\ x & 4 \end{pmatrix}$ alors si x > 2, M est inversible→**VRAI.**

M est inversible ⇔ $\det M \neq 0 \Leftrightarrow -4 + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$ . Donc si x > 2, M est inversible.

**7.** Dans le plan complexe, on considère les points A( –2i), B (–2 + 3i) et C(3 + i) alors ABC triangle isocèle →**VRAI.**

$AB = |b-a| = |-2+3i-(-2i)| = |-2+3i+2i| = |-2+5i| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

$AC = |c-a| = |3+i-(-2i)| = |3+i+2i| = |3+3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .

$BC = |c-b| = |3+i-(-2+3i)| = |3+i+2-3i| = |5-2i| = \sqrt{25+4} = \sqrt{25}$ = AB donc ABC isocèle en B.

**8.** Soient deux événements A et B tels que P(A) = 0,6 et p(B) = 0,5 alors A et B ne sont pas incompatibles →**VRAI.**

Supposons A et B incompatibles (raisonnement par l'absurde) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1{,}1 > 1$ impossible.

Donc l'hypothèse est fausse : A et B ne sont pas incompatibles.

**9.** On tire successivement et sans remise trois boules d'une urne contenant 4 blanches et 3 noires.

La probabilité que les deux premières soient blanches et la troisième noire est $\frac{1}{6}$→**FAUX.**

Situation d'équiprobabilité donc pour tout événement A, $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$.

$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35} \neq \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

**10.** La taille d'un homme âgé de plus de 25 ans suit la loi normale de moyenne 175 cm et d'écart-type 6 cm.

Alors parmi les hommes mesurant plus de 1,81 m, la proportion de ceux mesurant plus de 1,93 m est d'environ 1 % →**VRAI.**

$P_{(T>181)}(T > 193) = \frac{P(T>193 \text{ et } T>181)}{(T>181)} = \frac{P(T>193)}{(T>181)} \simeq \frac{0{,}00135}{0{,}15866} \simeq 0{,}0085$ soit 0,85% à $10^{-4}$ près donc environ 1 % à 0,15 % près.

**11.** On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé le cercle C d'équation $(x-7)^2 + y^2 = 25$

et la droite D tangente à C au point A(3 ;–3). Alors D passe par l'origine du repère →**FAUX.**

C a pour centre le point B(7 ;0) et pour rayon r = 5. D passe par le point A(3 ;–3) et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à D.

Donc M(x ;y) appartient à D ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux ⇔ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ avec $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

⇔ $4(x-3) + 3(y+3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = 3$. Donc D ne passe pas par l'origine du repère car $4 \times 0 + 3 \times 0 = 0 \neq 3$.

**Exercice 2**

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction polynomiale $P_n$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k}$

**Partie 1 : Etude de la fonction $P_2$**

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} P_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

**2.** $P_2$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout x, $P'_2(x) = -1+x-x^2+x^3$.

De plus $(x-1)(x^2+1) = x^3+x-x^2-1 = -1+x-x^2+x^3 = P'_2(x)$.

**3.** $P'_2(x)$ est du signe de x – 1 car $x^2+1>0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ . Tableau ci-contre :

| x | 0     1     $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $P'_2(x)$ | $-$   0   $+$ |
| Variation de $P_2$ | 0 ↘ $-7/12$ ↗ $+\infty$ |

**Partie 2 : Etude des fonctions $P_n$**

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^k\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n-1)x}+\cdots.+\frac{1}{2x^{2n-2}}-\frac{1}{x^{2n-1}}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n-1)x}+\cdots.+\frac{1}{2x^{2n-2}}-\frac{1}{x^{2n-1}}\right) = \frac{1}{2n}$.

**5.** $P_n$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout x, $P'_n(x) = -1+x-\cdots-x^{2n-2}+x^{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}x^k$.

De plus $(x+1)\,P'_n(x) = x\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}x^k =$
$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n-1} -(-1)^k x^k$
$= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k x^k - \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k = (-1)^{2n}x^{2n} - (-1)^0x^0 = x^{2n}-1$.

| x | 0     1     $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $P'_n(x)$ | $-$   0   $+$ |
| Variation de $P_n$ | 0 ↘ $P_n(1)$ ↗ $+\infty$ |

**6.** Pour tout x de $[0\,;+\infty[$ , $P'_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$ du signe de $x^{2n}-1$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

$x^{2n}-1>0 \Leftrightarrow x^{2n}>1 \Leftrightarrow x>1$.

**7.** D'après le tableau de variations, $P_n(1)<0$

car $P_n$ strictement décroissante sur [0 ;1] avec $P_n(0) = 0$.

**8. a)** Pour tout x de $[0\,;+\infty[$ , $P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{x^{2n+2}}{2n+2} = P_n(x)+x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

**b)** Montrons par récurrence sur $n\geq 2$ que $P_n(2)>0$.

Initialisation : $P_2(2) = -2+2-\frac{8}{3}+4 = \frac{4}{3}>0$.

Hérédité : Supposons $P_n(2)>0$ pour un entier n quelconque fixé ($n\geq 2$).

$P_{n+1}(2) = P_n(2)+2^{2n+1}\left(\frac{2}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right) = P_n(2)+2^{2n+1}\left(\frac{2n}{(2n+2)(2n+1)}\right)>0$ car $P_n(2)>0$ et $2^{2n+1}\left(\frac{2n}{(2n+2)(2n+1)}\right)>0$.

Conclusion : la propriété est initialisée pour n = 2 et héréditaire pour $n\geq 2$ donc vraie pour tout $n\geq 2$.

**9. a)** $P_1(x) = 0 \Leftrightarrow -x+\frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{x}{2}-1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Donc la seule solution de $P_1(x) = 0$ sur $[1\,;+\infty[$ est 2.

**b)** Pour $n\geq 2$, $P_n$est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$avec $P_n(1)<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$

alors l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n$ sur $[1\,;+\infty[$.

Comme $P_n(1)<0<P_n(2)$ c'est-à-dire $P_n(1)<P_n(x_n)<P_n(2)$ alors $1<x_n<2$.

**Partie 3 : Inégalités**

**10.** $P_n$ est la primitive de $P'_n$ qui s'annule en 0 donc $P_n(x) = \int_0^x P'_n(t)dt = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt$ car $P'_n(t) = \frac{t^{2n}-1}{t+1}$.

**11.** $\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2-\ln 1 = \ln 2$.

**12.** Pour tout t de [0 ;1] et tout entier n non nul, $0\leq t^{2n}\leq 1$ donc $0\leq 1-t^{2n}\leq 1$ et donc $\int_0^1\frac{1-t^{2n}}{t+1}dt\leq\int_0^1\frac{1}{t+1}dt = \ln 2$.

**13. a)** Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction $g_n$ définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g_n(t) = t^{2n}-1-n(t^2-1)$.

$g_n$ dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et $g'_n(t) = 2nt^{2n-1}-2nt = 2nt(t^{2n-2}-1)>0$ sur $[1\,;+\infty[$

donc $g_n$ strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

**b)** Comme $g_n$ strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ , son minimum est $g_n(1) = 0$ alors $g_n(t)\geq 0$ sur $[1\,;+\infty[$

donc $t^{2n}-1\geq n(t^2-1)$ sur $[1\,;+\infty[$.

**14.** Pour tout t de $[1\,;\,+\infty[$, $t^{2n}-1\geq n(t^2-1)$ et $t+1>0$ donc $\frac{t^{2n}-1}{t+1}\geq\frac{n(t^2-1)}{t+1} = \frac{n(t-1)(t+1)}{t+1} = n(t-1)$.

Alors $\int_1^x\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt\geq\int_1^x n(t-1)dt = \left[n\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\right]_1^x = n\left(\frac{x^2}{2}-x\right)-n\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{n}{2}(x^2-2x+1) = \frac{n}{2}(x-1)^2$.

## Partie 4 : Limite de la suite $(x_n)$

**15.** Pour tout entier naturel n non nul, $0 = P_n(x_n) = \int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt$.

Donc $\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt$.

**16.** D'après 14., pour tout x de $[1\,;\,+\infty[$, $\int_1^{x} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \frac{n}{2}(x-1)^2$ alors $\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \frac{n}{2}(x_n-1)^2$ car $x_n \in [1\,;+\infty[$.

**17.** D'après 12., 15. et 16. $\frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leq \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt \leq \ln 2$ alors $(x_n-1)^2 \leq \frac{2}{n}\ln 2$.

Comme $x_n \in [1\,;+\infty[$, $0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}}$.

**18.** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}} = 0$ donc d'près le théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty} x_n - 1 = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

## Partie 5 : Limite d'une somme

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = P_n(1)$ .

**19.** $u_n = P_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}dt - \int_0^1 \frac{1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}dt - \int_0^1 \frac{1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}dt - [\ln(t+1)]_0^1 = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}dt - \ln 2$.

**20.** Pour tout t de $[0\,;1]$, $t+1 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$ et $0 \leq \frac{t^{2n}}{t+1} \leq t^{2n}$. Alors $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}dt \leq \int_0^1 t^{2n}dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$.

**21.** $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}dt \leq \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow -\ln 2 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}dt - \ln 2 \leq \frac{1}{2n+1} - \ln 2 \Leftrightarrow -\ln 2 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1} - \ln 2$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} - \ln 2 = -\ln 2$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\ln 2$ d'après le théorème d'encadrement.

**22.** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

**a)** $v_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = P_n(1) = u_n$ et $v_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2n+1} = P_n(1) - \frac{1}{2n+1} = u_n - \frac{1}{2n+1}$ ;

**b)** Comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n+1} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = -\ln 2$ .

**c)** Comme la suite d'indices pairs $(v_{2n})$ et la suite d'indices impairs $(v_{2n+1})$ convergent toutes les deux vers $-\ln 2$ alors la suite $(v_n)$ converge éaglement vers $-\ln 2$ . Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

**d)** On a vu en **21.** que pour tout entier naturel n non nul, $-\ln 2 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1} - \ln 2$ alors $0 \leq u_n + \ln 2 \leq \frac{1}{2n+1}$.

**e)** $-u_n \leq \ln 2 \leq -u_n + \frac{1}{2n+1}$ donne un encadrement à $\frac{1}{2n+1}$ de ln2.

Donc il suffit d'écrire un algorithme donnant la valeur de $-u_n$ pour le premier entier n tel que $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$.

L'algorithme s'arrête nécessairement car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, donc il existe N tel que pour tout n > N, $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$.

<u>Langage naturel</u> :

*Initialisation* : u = 0,5 et n = 1 [car $-u_1 = -P_1(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$]

*Traitement* : Tant que $\frac{1}{2n+1} > \varepsilon$

u = u + $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

car $-u_{n+1} = -P_{n+1}(1) = -P_n(1) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = -P_n(1) + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = -u_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

n = n + 1

*Sortie* : Afficher u.

<u>Langage Python</u> :

```
def approxln2(Epsilon):
    u = 0.5
    n = 1
    while 1/(2*n + 1) > Epsilon :
        u = u + 1/(2*n+1)*(2*n+2)
        n = n + 1
    return u
```

**f)** $-u_n$ est une approximation de ln2 à $\frac{1}{2n+1}$ près et on veut à $10^{-3}$ près.

$\frac{1}{2n+1} < 10^{-3} \Leftrightarrow 2n+1 > 10^3 \Leftrightarrow 2n+1 > 1000 \Leftrightarrow n > \frac{999}{2} \Leftrightarrow n \geq 500$.

On est sûr que $-u_{500}$ est une approximation de ln2 à $10^{-3}$ près.

[Avec la calculatrice, on constate que $-u_{250}$ est déjà une approximation de ln2 à $10^{-3}$ près.