Durée : 4 heures

Baccalauréat C Caen juin 1969

EXERCICE 1

Trouver le reste de la division du nombre $12^{1\,527}$ par 5.

EXERCICE 2

On considère le nombre complexe

$$z = \frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$$

1. Mettre z sous forme trigonométrique.
2. En déduire les racines cinquième de z.

PROBLÈME

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé (R), d'axes Ox et Oy. On désigne par λ et μ deux constantes réelles, avec ţ $\neq 0$.
On considère la transformation $T_{\lambda,\,\mu}$ qui, au point M de coordonnées x et y, fait correspondre le point $M' = T_{\lambda,\,\mu}(M)$, de coordonnées x' et y' données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & \lambda x + \mu y \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que $T_{\lambda,\,\mu}$ est une application bijective du plan (P) sur lui-même. Comment choisir λ et μ pour que $T_{\lambda,\,\mu}$ soit une application involutive ?

   λ et μ étant donnés arbitrairement, avec $\mu \neq 0$, quel est l'ensemble des points invariants par la transformation $T_{\lambda,\,\mu}$ [c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $T_{\lambda,\,\mu}(M) = M$] ?

   b. Si M décrit une droite (d), montrer que le point M' décrit une droite (d'). Démontrer que le birapport de l'ensemble ordonné de quatre points alignés est conservé par $T_{\lambda,\,\mu}$.

   c. Montrer que l'ensemble des points M pour lesquels il existe un nombre réel s tel que

   $$\overrightarrow{\mathrm{O}M'} = s\,\overrightarrow{\mathrm{O}M}$$

   se compose, si $\mu \neq -1$, de deux droites, chacune de ces droites correspondant à une valeur de s que l'on précisera.

   Que devient cet ensemble si $\mu = 1$?

2. On considère l'ensemble (E) de toutes les transformations $T_{\lambda,\,\mu}$ pour λ et μ réels et $\mu \neq 0$.

a. Définir le produit de la transformation $T_{\lambda,\,\mu}$ par la transformation $T_{\lambda',\,\mu'}$. Montrer que l'ensemble (E) admet, pour ce produit, une structure de groupe.

b. Montrer que ce groupe n'est pas commutatif, mais qu'à une transformation donnée, $T_{\lambda,\,\mu}$, on peut associer une infinité de transformations $T_{\lambda',\,\mu'}$ telles que

$$T_{\lambda,\,\mu} \circ T_{\lambda',\,\mu'} = T_{\lambda',\,\mu'} \circ T_{\lambda,\,\mu}.$$

Par quelle équation λ, μ, λ', μ' doivent-ils être liés pour qu'il en soit ainsi ?

3. Dans ce paragraphe, on étudie la transformation $T = T_{1,\,1}$ définie par

$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = x + y.$$

a. Quelle est l'équation du transformé, (C′), du cercle (C) de centre O et de rayon 1 ?

b. On considère le repère orthonormé (R′) défini par les axes OX et OY obtenus respectivement en faisant subir aux axes Ox et Oy une rotation de centre O et d'angle α tel que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

Écrire l'équation de la courbe (C′) dans le repère (R′). Déterminer α pour que cette équation ne contienne pas de terme en XY. (On calculera $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$.)

c. Reconnaître et tracer la courbe (C′). Calculer l'aire du domaine intérieur à (C′).

d. Soit (Σ) l'intersection des domaines intérieurs à (C) et à (C′). Montrer que les quatre domaines intérieurs à (C) ou à (C′) et extérieurs à (Σ) ont des aires égales.