∽ Baccalauréat C Caen juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Résoudre dans le corps des nombres réels l'équation

$$\mathrm{e}^{2x-1} - \sqrt{\mathrm{e}^{2x+2}} - 2\mathrm{e}^3 = 0,$$

où e est la base des logarithmes népériens et où x est l'inconnue.

EXERCICE 2

Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation

$$z^6 + (1-2\mathrm{i})z^3 - 2\mathrm{i} = 0,$$

où i est la racine de -1 d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et où z est l'inconnue (on posera $z^3 = Z$).

PROBLÈME

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$, le point A de coordonnées (+ 2 ; 0) et la droite (D) d'équation

$$x - y = 0.$$

λ étant un paramètre réel, on désigne par (C_λ) le cercle variable passant par O et A et dont le centre a pour ordonnée λ. Ce cercle recoupe $y'\mathrm{O}y$ en M et la droite (D) en M$'$.
À chaque cercle (C_λ) est associée la droite (Δ_λ) définie par les points M et M$'$.

1. Former l'équation générale des cercles (C_λ).
   On considère l'application, s, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$ (où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls) qui, à chaque valeur de λ, fait correspondre l'aire (arithmétique) $s(\lambda)$ du triangle OMM$'$ (ces trois points pouvant être distincts ou confondus).
   Calculer $s(\lambda)$. Étudier et représenter graphiquement la fonction s. Pour quelles valeurs de λ l'aire $s(\lambda)$ est-elle nulle ?
   La fonction s est-elle continue pour ces valeurs ? Est-elle dérivable pour ces valeurs ?
   Préciser les cercles (C_λ) correspondants et les droites (Δ_λ) associées.
2. Quelle relation λ et λ' doivent-ils vérifier pour que les cercles (C_λ) et $(C_{\lambda'})$ soient orthogonaux ? Montrer que les droites associées (Δ_λ) et $(\Delta_{\lambda'})$ sont perpendiculaires.
3. Soit l'inversion de pôle A et de puissance 4.
   Indiquer avec précision les transformées des droites $y'\mathrm{O}y$ et (D) dans cette inversion.
   On appelle m et m' les inverses de M et de M$'$. Montrer que O, m et m' sont alignés. Écrire l'équation de la droite Omm'.
   Calculer, en fonction de λ, les coordonnées de m et de m'. Montrer que le lieu du milieu, n, de mm' est le cercle $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$.

4. Soit la courbe (P) d'équation

$$(x+y)^2-12x+4y+4=0.$$

t Trouver l'équation de cette courbe dans le repère $\left(\omega,\ \overrightarrow{\mathrm{I}},\ \overrightarrow{\mathrm{J}}\right)$, d'axes $X'\omega X$ et $Y'\omega Y$, défini de la manière suivante :

ω est le point de coordonnées (+ 1 ; + 1), $\overrightarrow{I}=\overrightarrow{\omega \mathrm{A}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{J}}$ est le vecteur qui se déduit de $\overrightarrow{\mathrm{I}}$ dans la rotation de centre ω et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

Pour cela, on établira les formules de changement de repère suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+X+Y,\\ y &=& 1-X+Y.\end{array}\right.$$

Montrer que la courbe (P) est une parabole, dont on précisera le sommet et l'axe.

Montrer que pour tout λ la droite (Δ_λ) est tangente à (P) et que, réciproquement, toute tangente à (P) est une droite (Δ_λ). Calculer les coordonnées, dans le nouveau repère, du point de contact de (Δ_λ) avec (P).