

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Caen juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction, de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , définie par

$$f(x) = \frac{x \operatorname{Log} x}{x-1}, \quad \text{pour } x \neq 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

1. La fonction f est-elle continue dans $]0; +\infty[$?

Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 1$.

2. Soit g la fonction de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , définie par

$$g(x) = x - 1 - \operatorname{Log} x.$$

Étudier le sens de variation de g ; en déduire le signe de $g(x)$ et le sens de variation de f .

EXERCICE 2

Soit a et b deux entiers naturels donnés. On se propose de déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}, \\ x \equiv a \pmod{9}, \\ x \equiv b \pmod{11}. \end{cases}$$

1. Démontrer que toutes les solutions sont congrues à un même nombre modulo 99. (On pourra utiliser l'identité de Bezout.)
2. Déterminer l'ensemble des solutions du système.

PROBLÈME

Soit (E) un plan affine rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy . Il a pour espace vectoriel associé le plan vectoriel \mathbb{R}^2 . Soit deux points distincts de (E) , M de coordonnées (a, b) et M' de coordonnées (a', b') . On désigne par P et P' les projections respectives de M et de M' sur Ox parallèlement à Oy , par Q et Q' les projections respectives de M et M' sur Oy parallèlement à Ox .

1. a. On suppose d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{PQ'}$ et $\overrightarrow{P'Q}$ sont non nuls. Écrire, en fonction de a, b, a' et b' , les équations des trois droites $PQ', P'Q$ et MM' . Démontrer que ces trois droites sont, soit parallèles, soit concourantes.
- b. Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{PQ'}$ est nul, quelle est la position relative des deux droites $P'Q$ et MM' ?
- Examiner aussi le cas où le vecteur $\overrightarrow{P'Q}$ est nul.

2. Soit un réel, α , non nul et le vecteur $\vec{i} + \vec{i} = \alpha \vec{j}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante (liant a, b, a', b' et α) pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{P'Q}$ et $\overrightarrow{MM'}$ soient colinéaires à \vec{i} .

Démontrer que la condition précédente définit une application f_α de (E) dans (E), telle que

$$\begin{cases} f_\alpha(M) = M' & \text{pour } M \neq O \\ f_\alpha(O) = O. \end{cases}$$

Démontrer que f_α est affine et involutive.

Démontrer que f_α est une symétrie, dont on précisera les éléments.

3. Soit φ_α l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 associée à f_α . Écrire la matrice de φ_α dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . Soit Φ l'ensemble des applications f_α telles que α appartienne à l'ensemble des réels non nuls.

Soit x et y deux réels non nuls, calculer les matrices de $\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma$ et de $\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Dans quel cas ces deux matrices sont-elles égales?

Soit δ un réel non nul. Démontrer que $\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\delta$ appartient à Φ .

Démontrer que le composé d'un nombre impair d'éléments de Φ est un élément de Φ .