

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Caen ∞

EXERCICE 1

On considère l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (2i - 5)z^2 + 7(1 - i)z - 2 + 6i = 0.$$

1. Démontrer qu'elle admet une racine réelle que l'on calculera.
2. Résoudre ensuite l'équation dans \mathbb{C} .

EXERCICE 2

L'espace vectoriel euclidien E est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit s_1 la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel P_1 d'équation $x + y - 2z = 0$.

Connaissant les coordonnées $(x; y; z)$ d'un vecteur \vec{v} de E , calculer les coordonnées $(x_1; y_1; z_1)$ de son image $s_1(\vec{v})$.

2. Soit r l'endomorphisme de l'espace vectoriel E défini par :

$$\begin{cases} r(\vec{i}) = \vec{j} \\ r(\vec{j}) = \vec{k} \\ r(\vec{k}) = \vec{i} \end{cases}$$

Démontrer que r est une rotation vectorielle, déterminer l'axe et la mesure de l'angle de cette rotation.

Démontrer qu'il existe une symétrie vectorielle orthogonale s_2 par rapport à un plan vectoriel P_2 telle que $s_2 \circ s_1 = r$; donner une équation cartésienne de P_2 .

PROBLÈME

Partie A

1. Soit g l'application de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = x + 1 - \text{Log } x$$

où $\text{Log } x$ désigne le logarithme népérien de x .

Étudier son sens de variation et en déduire que, pour x strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.

2. Soit h l'application de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{Log } x.$$

a. Étudier les variations de la fonction h et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan affine euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé.

$$\left(\text{On remarquera que } h'(x) = \frac{g(x)}{x^2}\right).$$

b. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ (e désigne la base des logarithmes népériens).

Partie B

Soit f l'application de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{h(x)} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Cette fonction est-elle continue sur $[0; +\infty[$? Est-elle dérivable sur $[0; +\infty[$?

2. Démontrer que :

$$\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x} \text{Log } x} \quad \text{pour } x > 0.$$

3. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Démontrer que pour x strictement positif et différent de 1 :

$$\frac{f(x) - x}{\text{Log } x} = \frac{e^{\frac{1}{x} \text{Log } x} - 1}{\frac{1}{x} \text{Log } x}.$$

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - x}{\text{Log } x}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$; quelle est cette limite?

La fonction $x \mapsto f(x) - x$ admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

4. Étudier le sens de variation de la fonction f et montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur lui-même.

Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ et $f(2)$ et tracer la courbe représentative Γ de la fonction f . On indiquera la tangente en O et on précisera la branche infinie.

Soit A le point de Γ d'abscisse 1. Écrire l'équation de la tangente en A à Γ .

Montrer que $f''(1) = 0$. (On admettra que le point A est un point d'inflexion pour Γ , c'est-à-dire un point où la courbe traverse sa tangente).

Partie C

Un point mobile M du plan affine euclidien (P) a, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de (P) , à chaque instant t strictement positif, des coordonnées

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

f et g étant les fonctions définies dans les questions précédentes.

1. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$y = (g \circ f^{-1})(x).$$

2. Construire la trajectoire de M lorsque t décrit l'intervalle $[\frac{1}{2}; 2]$.
Préciser le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M à la date $t = 1$ et les vecteurs vitesses aux dates $t = \frac{1}{2}$ et $t = 2$.