

∞ Baccalauréat C Caen juin 1981 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

P est un plan affine muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et f l'application affine de P dans P qui, à tout point M de coordonnées x et y , associe le point M' de coordonnées x' et y' telles que

$$x' = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \quad ; \quad y' = -\frac{2}{2}x + \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}.$$

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{I} des points invariants par f .
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction fixe.
3. Montrer que l'on peut trouver un couple $(\alpha; \alpha')$ de réels vérifiant $\alpha + \alpha' = 1$, tel que, pour tout point M , le barycentre du système $\{M, \alpha\} \{M', \alpha'\}$ soit invariant par f .
En déduire une construction simple de l'image par f d'un point M quelconque.

EXERCICE 2

3 POINTS

Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numération de base n (n entier naturel supérieur ou égal à 6).

$$a = \overline{2310}, \quad b = \overline{252}.$$

On désigne leur plus grand commun diviseur par d .

1. Démontrer que $(2n + 1)$ divise a et b et que $d = 2(2n + 1)$ ou $d = 2n + 1$ suivant que n est pair ou impair.
2. On prend $n = 6$; résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $ax + by = -26$.

PROBLÈME

13 POINTS

P est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $R(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 4 cm.)
 C_a est la représentation graphique dans le repère R de la fonction f_a définie sur \mathbb{R} par

$$f_a(x) = \frac{a^2 e^x}{a^2 + e^{2x}}.$$

a est un nombre réel strictement supérieur à 0.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f_1 .
Montrer que la courbe C_1 a un axe de symétrie. Construire C_1 .
2. Soit g l'application de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} définie par $x \mapsto \log(\tan x)$.
Montrer que g est bijective. Soit h l'application réciproque de g . Montrer que h est dérivable et que sa fonction dérivée h' est égale à f_1 .

3. Soit $S(x)$ l'aire de la partie du plan P limitée par la courbe C_1 l'axe des abscisses et les parallèles à l'axe des ordonnées d'abscisses respectives x et $-x$ ($x > 0$).
Exprimer $S(x)$ à l'aide de la fonction h . Trouver la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B

Soit φ_a l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées x et y , associe le point M' de coordonnées x' et y' telles que

$$x' = x + \log a, \quad y' = ay \quad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

1. Montrer que l'image de la courbe C_1 par φ_a est la courbe C_a .
2. Vérifier que φ_a est bijective et étudier l'application $\varphi_a \circ s \circ \varphi_a^{-1}$ où s désigne la symétrie orthogonale relativement à l'axe des ordonnées du repère R .
Dédurre de cette étude que C_a a un axe de symétrie.
3. Donner le tableau de variation de f_a . On appelle S_a le point de C_a d'ordonnée maximum. Quel est l'ensemble des points S_a lorsque a décrit \mathbb{R}_+^* ?
4. Soit \mathcal{F} l'ensemble des applications φ_a lorsque a décrit \mathbb{R}_+^* .
Montrer que \mathcal{F} , muni de la loi de composition des applications, est un groupe isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* .
Soit a_1 et a_2 deux réels de \mathbb{R}_+^* , montrer qu'il existe une application de l'ensemble \mathcal{F} pour laquelle l'image de C_{a_1} est C_{a_2} .
5. Montrer que si a_1 et a_2 sont distincts, C_{a_1} et C_{a_2} n'ont pas de point commun.
Déterminer l'ensemble des points de P par lequel passe une courbe C_a .