

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Caen ∞

**EXERCICE 1**

Déterminer l'ensemble des couples  $(a, b)$  d'entiers naturels non nuls tels que P.G.C.D.  $(a, b) + \text{P.P.C.M.}(a, b) = b + 9$ .

**EXERCICE 2**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère l'application  $\nu$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ , qui, à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y', z')$  tel que

$$\begin{cases} x &= -x + 2 \\ y' &= z + 1 \\ z' &= y + 1 \end{cases}$$

1. Soit  $f = h_1 \circ \nu$ , application composée de  $\nu$  par  $h_1$ , où  $h_1$  est l'homothétie de centre  $A(1; 0; 0)$  et de rapport 2.  
Démontrer que  $f$  admet un unique point invariant B.
2. Soit  $r = h_2 \circ \nu$ , application composée de  $\nu$  par  $h_2$ , où  $h_2$  est l'homothétie de centre B et de rapport  $\frac{1}{2}$ .  
Démontrer que  $r$  est un demi-tour d'axe une droite  $D$ , que l'on précisera.
3. En déduire que  $\nu$  est un vissage.  
Préciser les éléments caractéristiques de ce vissage.

**PROBLÈME**

N.B. - Les parties B et C de ce problème sont indépendantes.

Soit  $\lambda$  un réel non nul, on considère la fonction  $f_\lambda$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x + 1)e^{-x}$$

On désigne par  $C_\lambda$  la courbe représentative de la fonction  $f_\lambda$  dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

1. Déterminer  $f'_\lambda$  et  $f''_\lambda$  les fonctions dérivées première et seconde de  $f$ .  
Étudier les variations de  $f'_\lambda$ .

2. Discuter, selon le réel  $\lambda$ , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue  $x$ ,

$$f'_\lambda = 0.$$

Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et à 1. (On distinguera les quatre cas  $\lambda < 0$ ;  $0 < \lambda < e$ ;  $\lambda = e$ ;  $\lambda > e$ ).

3. Dédurre de ce qui précède, le sens de variation de  $f_\lambda$  suivant les valeurs du réel  $\lambda$ .
4. Étudier les limites de  $f_\lambda$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Préciser les branches infinies de la courbe  $C_\lambda$ .
5. Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes  $C_\lambda$ .
6. Soit  $I_\lambda$  le point de  $C_\lambda$  dont l'abscisse est 1. Écrire une équation de la tangente  $D_\lambda$  en  $I_\lambda$  à la courbe  $C_\lambda$ .  
Montrer que les droites  $D_\lambda$  ont un point commun B.
7. On se propose de tracer avec précision les courbes  $C_{-1}$ ,  $C_e$ ,  $C_4$ . Les courbes seront tracées sur une même figure sur papier millimétrique en prenant 2 cm comme unité.
- a. On prend  $\lambda = -1$ . Montrer que l'équation d'inconnue  $x$ ,  $f'_{-1}(x) = 0$ , n'a qu'une solution notée  $x_1$  comprise entre  $-0,57$  et  $-0,56$ .  
Construire la courbe  $C_{-1}$ .
- b. Tracer  $C_e$ .
- c. Montrer que l'équation d'inconnue  $x$ ,  $f'_4(x) = 0$ , a deux solutions :  $x_1$  comprise entre  $0,35$  et  $0,36$  et  $x_2$  comprise entre  $2,15$  et  $2,16$ .  
Tracer  $C_4$ .

### Partie B

1. Montrer que la fonction  $f_\lambda$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$  et déterminer l'ensemble de ces primitives.
2. Montrer que, pour chaque réel non nul  $\lambda$ , on peut définir une suite de fonctions continues  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} & \varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda. \end{cases}$$

Calculer  $\varphi_1(x)$ . Montrer, par récurrence, pour tout naturel  $n$  non nul et tout réel  $x$

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n + 1}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda(x+n+1)e^{-x}.$$

### C

On suppose dans cette partie  $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$ .

1. Montrer que le réel  $x_1$  tel que  $f'_\lambda(x_1) = 0$  est strictement inférieur à  $-1$ .  
En déduire que, si  $-1 < x < 0$ , alors,  $-1 < \lambda < 0$ .
2. On considère la suite  $u$  définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) = u_n + \lambda(u_n + 1)e^{-u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que :

- a.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_n < 0$ ,
- b. la suite  $u$  est décroissante,
- c.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < (1 + \lambda)(u_n + 1)$ .

En déduire que la suite  $u$  est convergente et trouver sa limite.