

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Caen septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

Déterminer les entiers naturels n tels que le nombre N défini par

$$N = n^3 + n - 2$$

soit divisible par 7.

EXERCICE 2

On donne le nombre complexe $z = 3 + 4i$.

Soient z_1 et z_2 ses racines carrées. Placer, dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), les images, M, M_1 et M_2 , des trois nombres z, z_1 et z_2 .

Déterminer z_1 et z_2 par leurs parties réelles et leurs parties imaginaires.

PROBLÈME

Dans un plan, on considère deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ ayant la même origine O . On désigne par A le point de coordonnées $(0 ; -4)$ et par B le point de coordonnées $(0 ; +4)$. Soit $u'Au$ et $v'Bv$ deux axes ayant respectivement pour origine les points A et B , tous deux parallèles à $x'Ox$ et orientés dans le même sens que lui. Soit k un nombre réel donné.

On considère l'application f qui, au point M de $u'Au$ d'abscisse $\overline{AM} = m$, associe, s'il existe, le point P de $v'Bv$ d'abscisse $\overline{BP} = p$ telle que

$$pm - p - m - k = 0.$$

(Les unités de longueur sur $u'Au$ et sur $v'Bv$, sont les mêmes que sur $x'Ox$.)

1. Quel est le point I de $u'Au$ où l'application n'est pas définie
Montrer que, si $k \neq -1$, f est une application bijective de la droite $u'Au$ privée du point I sur la droite $v'Bv$ privée d'un point J que l'on déterminera.
Que se passe-t-il si $k = -1$?
2. M et N désignant deux points de l'axe $u'Au$, on désigne par \overline{MN} la mesure algébrique, sur l'axe $u'Au$, du vecteur \overrightarrow{MN} . De la même façon, P et Q désignant deux points de l'axe $v'Bv$, on désignera par \overline{PQ} la mesure algébrique, sur l'axe $v'Bv$, du vecteur \overrightarrow{PQ} .
 - a. Montrer que $\overline{IM} \cdot \overline{JP} = k + 1$.
 - b. Soit quatre points, M_1, M_2, M_3 et M_4 de l'axe $u'Au$, distincts deux à deux et distincts de I . On appelle P_1, P_2, P_3 et P_4 leurs images par f .
Montrer que, si $k \neq -1$, le birapport de l'ensemble ordonné des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 est égal au birapport de l'ensemble ordonné des quatre points P_1, P_2, P_3 et P_4 .
Que peut-on dire des points P_1, P_2, P_3 et P_4 si l'ensemble ordonné des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 forme une division harmonique?

- 3. a.** Soit M_0 et M deux points de l'axe $u'Au$, différents de I , et soit P_0 et P leurs images respectives par f . Démontrer analytiquement que, si $k \neq -1$, l'ensemble des points d'intersection des droites M_0P et MP_0 , lorsque M_0 reste fixe et M parcourt l'axe $u'Au$ privé du point I , est une droite privée de deux points.

En déduire une construction de P , connaissant M, M_0 et P .

- b.** k étant toujours supposé différent de -1 , donner l'équation représentant la droite MP dans le système d'axes $(x'Ox, y'Oy)$. Soit X et Y les coordonnées d'un point C quelconque du plan.

Comment choisir X et Y pour qu'il existe une droite PM et une seule passant par C ?

Montrer que l'ensemble des points C possédant la propriété précédente se compose de deux droites privées chacune d'un point et d'un ensemble (C_k) dépendant de k .

Reconnaitre la nature de l'ensemble (C_k) suivant les valeurs de k et tracer sur une même figure (C_0) et (C_{-1}) .