Baccalauréat C Caen septembre 1972

EXERCICE 1

Soit l'équation

$$23x + 56y = 3, \quad (x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$$

1. Déterminer une solution particulière de cette équation. (On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide.)
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation.

EXERCICE 2

Soit $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.

1. Calculer les trois nombres complexes a, b et c sachant que l'on a

$$f(-\text{i}) = 0, \quad f(\text{i}) = -8(1+\text{i}) \quad \text{et } f(1) = -6 + 2\text{i}.$$

2. a, b et c ayant les valeurs trouvées dans la question 1., résoudre l'équation

$$f(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

PROBLÈME

Soit (E) un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy. On désigne pour $(x\ ;\ y)$ les coordonnées d'un point M ($M \neq$ O) de (E), par (Δ) la droite perpendiculaire en M à la droite (OM) et par M' (s'il existe) le point de (Δ) d'abscisse $-2x$.

1. Quel est l'ensemble (F) des points M de (E) pour lesquels M' existe?
   On désigne par T l'application de (F) dans (E) telle que $T(M) = M'$.
   Calculer, en fonction de x et de y, les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point M'.
   Quel est l'ensemble des points invariants par T ?
2. Soit P un point de (E) de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$.
   Existe-t-il un point M de (F) tel que $T(M) =$ P?
   On démontrera que M existe si, et seulement si, P appartient à une partie du plan (E) limitée par deux droites (D) et (D$'$), dont on donnera les équations.
   L'application T est-elle injective?
3. Déterminer l'image par T de l'ensemble (L) $\cap$ (F) dans les cas suivants :
   - (L) est la droite d'équation $x = a$;
   - (L) est la droite d'équation $y = \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$;
   - (L) est la droite d'équation $y = b$ $(b \neq 0)$.

   Dans ce dernier cas, démontrer que la courbe $T[(\text{L}) \cap (\text{F})]$ est tangente aux deux droites (D) et (D$'$). (Faire une figure pour $b = 3$.)