

∞ Baccalauréat C Caen septembre 1977 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

L'espace affine euclidien E est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit M un point de E de coordonnées $(x; y; z)$.
Déterminer les coordonnées $(x'; y'; z')$ du point M' , image de M dans la symétrie orthogonale s par rapport au plan P dont une équation est :
 $2x + 3y - z - 5 = 0$.
2. Soit f l'application affine de E dans E qui au point M associe le point M'' de coordonnées $(x''; y''; z'')$ tel que :

$$\begin{cases} x'' = \frac{3x - 6y + 2z + 17}{7} \\ y'' = \frac{-6x - 2y + 3z + 29}{7} \\ z'' = \frac{2x + 3y + 6z + 5}{7} \end{cases}$$

Démontrer que f est un antidéplacement de E , qui n'a pas de point invariant et que l'on peut décomposer f en le produit commutatif de l'application s par une application g que l'on déterminera.

EXERCICE 2

4 POINTS

Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^3 + (3 + 2i)z^2 + (3 - i)z + 2(1 - 5i) = 0$$

après avoir montré qu'elle admet une solution réelle.

PROBLÈME

12 POINTS

1. Soit la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- a. Donner l'ensemble \mathcal{D} de définition de f .
Démontrer que : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) + f(-x) = 0$.
Démontrer que f est dérivable sur \mathcal{D} et définir la fonction dérivée.
Étudier les variations de f .
- b. Tracer la courbe représentative \mathcal{C} de f dans un plan euclidien P , rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Étudier les branches infinies, Préciser les positions relatives de \mathcal{C} et de sa tangente en 0. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) - x \end{cases}$$

2. a. Démontrer que f est intégrable sur $[0; a]$ où $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\text{Calculer } I(a) = \int_0^a \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) dx.$$

- b. Soit u_n l'aire de la portion de plan ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ telles que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

- i. Démontrer que $u_n = n \text{Log} \left(n + \sqrt{n^2 + 1} \right) - \sqrt{n^2 + 1} - 1$.
- ii. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Étudier son sens de variation. Cette suite est-elle convergente?
3. a. Démontrer, sans calcul, que f admet une application réciproque notée g . Donner son ensemble de définition, montrer qu'elle y est dérivable et tracer sa courbe représentative (\mathcal{C}') dans le plan P.
- b. Calculer $g(x)$ et $g'(x)$.
- c. Dans toute la suite du problème, on pose $g' = h$.
Calculer $h'(x)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^2(x) - g^2(x) = 1$.
- d. Soit (O', \vec{i}, \vec{j}) un nouveau repère orthonormé de P.
Soit \mathcal{H} l'ensemble des points M de coordonnées $(X; Y)$ où $X = 3h(x)$, $Y = 2g(x)$ et x décrit \mathbb{R} . Construire \mathcal{H} .