Baccalauréat C Caen septembre 1983

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (3+2\text{i})z^2 + (2+4\text{i})z = 0.$$

2. $\mathscr{P}$ étant un plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, on appelle A, B, C les points de $\mathscr{P}$ dont les affixes sont les racines de l'équation.
Montrer qu'il existe un point D, d'abscisse nulle, distinct des points A, B, C, tel que D appartienne' au cercle passant par A, B, C. Déterminer l'ordonnée de D.

EXERCICE 2

Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \,\text{d}x, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\text{d}x.$$

PROBLÈME

Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit $\mathscr{V}$ le plan vectoriel associé.

Partie A

Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{V}$ de matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que φ est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.

Partie B

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\left|4x^2 - 16x + 7\right|}.$$

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. a. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de C. Étudier les variations de f Déterminer les asymptotes de C. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

b. Soit $\mathscr{C}'$ l'image de $\mathscr{C}$ dans la symétrie orthogonale d'axe $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath}\right)$. Tracer $\mathscr{C}'$. Montrer que $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$ est la réunion d'une ellipse E et d'une hyperbole H ; on donnera les coordonnées du centre et des sommets de chacune des deux coniques ainsi que celles de leurs foyers et les équations des directrices associées.

2. Soit s l'application affine de $\mathscr{P}$ laissant invariant le point Ω de coordonnées $(2\,;\,0)$ et dont l'endomorphisme associé est φ (étudié dans la partie A).
Étudier s(E) et s(H). Tracer s(H).

Partie C

Sur l'intervalle $\text{I} =]1\ ;\ +\infty[$ de $\mathbb{R}$, on définit la fonction u de la variable t par

$$\forall t \in \text{I},\quad u(t) = \text{e}^{t-1} + \ln(t-1)\quad \text{(ln désigne le logarithme népérien).}$$

1. a. Étudier la variation de u. Montrer que u est une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout t de I, calculer $u''(t)$, où u'' est la dérivée seconde de u.
Montrer que u'' est une bijection de I sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'annule pour $t_0 \in \left]\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right[$.

2. Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère le mouvement d'un point M dont les coordonnées sont définies par

$$\forall t \in \text{I},\quad \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2 + \dfrac{3}{2}\cos[u(t)] \\ y & = & \dfrac{3}{2}\sin[u(t)] \end{array}\right.\quad (t \text{ désigne le temps}).$$

a. Déterminer la trajectoire de M et la tracer.

b. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ de M à l'instant t.
Étudier la nature du mouvement de M sur sa trajectoire.