

♣ Baccalauréat C Cambodge et Laos juin 1971 ♣

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction f qui à tout réel x fait correspondre

$$f(x) = (1 - 2x)e^{-x}.$$

Tracer sa courbe représentative en repère orthonormé.

On précisera notamment les branches infinies. Quand x tend vers $-\infty$ on pourra poser $x = -X$.

(La lettre e désigne la base des logarithmes népériens.)

EXERCICE 1

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Mettre le nombre $Z = \frac{z_1}{z_2}$ sous la forme $a + ib$ (a et b étant des réels).

En déduire le sinus et le cosinus de $\frac{7\pi}{12}$.

PROBLÈME

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ la transformation ponctuelle \mathcal{F} qui, à tout point M , de coordonnées $(x; y)$ distinct de l'origine, associe le point $M'(x'; y')$ tel que

$$x' = \frac{8x}{4x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{8y}{4x^2 + y^2}.$$

1.
 - a. Donner les expressions de x et de y en fonction de x' et de y' .
 - b. Que peut-on en conclure pour la transformation \mathcal{F} ?
 - c. Déterminer et construire l'ensemble des points doubles de \mathcal{F} .
2. Déterminer les transformés par \mathcal{F}
 - a. d'une droite passant par l'origine (mais privée de ce point),
 - b. d'une droite parallèle à $x'Ox$, d'équation $y = y_0$; préciser les éléments remarquables de cette dernière transformée.
3. Trouver l'équation de la transformée par \mathcal{F} de la courbe (C) d'équation

$$4x^2 + y^2 - 16x + 4y + \lambda = 0.$$

Montrer qu'il existe une, et une seule, valeur de λ , λ_0 , pour laquelle cette courbe est invariante dans la transformation. Construire (C) en donnant à λ la valeur λ_0 ?

4. Soit $M(x; y)$ un point du plan, distinct de O , et $M'(x'; y')$ son transformé par \mathcal{F} . L'affinité orthogonale, \mathcal{A} , d'axe $x'Ox$ et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme M en $N(X; Y)$; l'inversion J de pôle O et de puissance 2 transforme N en $N'(X'; Y')$.
- Déterminer les expressions de X' et Y' en fonction de x et de y .
 - Quelle est la transformation qui fait passer de N' à M' ?
 - Montrer que \mathcal{F} est ainsi identique à un produit de trois transformations simples.
 - Retrouver, par l'écriture des produits de transformations, la propriété demandée au b. de la question 1.