

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Cambodge et Laos juin 1969 ∞

EXERCICE 1

On considère quatre entiers naturels, a, b, c et d , formant une suite géométrique de raison r .
On suppose que r est strictement supérieur à 1 et premier avec a .
Déterminer ces quatre entiers pour qu'on ait la relation

$$10a^2 = d - b.$$

EXERCICE 2

1. On désigne par x un nombre réel. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = (x - 2) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

2. Démontrer que le nombre z^{1968} est réel; préciser son signe.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy ; on note \vec{i} et \vec{j} les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy .

On désigne par t l'application qui, à tout point M de la droite Ox , d'abscisse $x \neq 0$, associe le point M' de cette même droite ayant pour abscisse

$$x' = \frac{4x - 3}{x}$$

On écrit, dans ce cas, $M' = t(M)$.

1. Montrer qu'il existe deux points distincts, A et B , sur la droite Ox tels que $A = t(A)$ et $B = t(B)$; calculer leurs abscisses.

Démontrer que le birapport (A, B, M, M') est indépendant de la position de M sur la droite Ox .

2. Calculer, en fonction de l'abscisse, x , du point M sur la droite Ox , la longueur, z , du segment MM' .

Étudier les variations de la fonction $z(x)$ ainsi définie; tracer son graphe.

Utiliser ce graphe pour discuter l'existence et le nombre des points M tels que la longueur MM' ait une valeur donnée, λ .

3. Démontrer que le point $M' = t(M)$ se déduit du point M par une inversion I , de pôle O , de puissance μ , suivie d'une translation de vecteur $k \vec{i}$, les nombres réels μ et k étant à déterminer.

4. On appelle T l'application associant à un point P du plan, distinct de O , le point P' qui s'en déduit par l'inversion de pôle O , de puissance μ , suivie de la translation de vecteur $k \vec{i}$ (les nombres μ et k étant ceux déterminés à la question précédente).

Soit (ω) le cercle de centre $\omega(0 ; -1)$ et de rayon 1. Démontrer qu'une tangente (D) à ce cercle a pour image, par l'application T , un cercle, que l'on désignera par (Γ) , sauf pour une position singulière de la droite (D) .

Démontrer que les cercles (Γ) associés aux diverses tangentes au cercle (ω) passent par un point fixe, O_1 , et qu'ils restent tangents à une droite fixe, (Δ) , que l'on déterminera.

En déduire l'ensemble des centres de ces cercles.