

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Cambodge et Laos septembre 1969 ☞

EXERCICE 1

Résoudre, dans l'ensemble, \mathbb{C} , des nombres complexes, l'équation

$$z^2 + (9i - 5)z - 14 - 23i = 0.$$

EXERCICE 2

Le logarithme népérien de x étant désigné par $\text{Log } x$, on considère les deux fonctions f et g de la variable x définies par

$$f(x) = \text{Log } x - x \quad \text{et} \quad g(x) = x \text{Log } x - \frac{x^2}{2} - x.$$

1. Préciser le domaine de définition de chaque fonction et montrer que f est la fonction dérivée de g .
2. Étudier les variations de la fonction f et construire son graphe, (C), dans un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$. (On prendra, pour $\text{Log } 2$, la valeur approchée 0,69.)

PROBLÈME

Un plan p est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$; un plan P est rapporté à un repère orthonormé d'axes $X'OX$ et $Y'OY$.

On illustrera éventuellement les questions par deux figures distinctes, l'une relative au plan p , l'autre au plan P.

Soit T l'application du plan p dans le plan P associant à tout point $m(x; y)$ de p le point $M(X; Y)$ de P défini par

$$X = x^2 \quad \text{et} \quad Y = y^2.$$

On écrira alors $M = T(m)$.

1. Définir l'ensemble, E, des points de P qui sont les images par T de points de p .
Discuter, suivant la position du point M dans le plan P, le nombre et la disposition des points m du plan p tels que $T(m) = M$.
2. Dans le plan P on considère les points $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; on appelle S le segment [AB].
Quelle est l'équation de la droite AB?
Quel est l'ensemble, e, des points m du plan p dont l'image $M = T(m)$ appartient à S?

3. Dans le plan P on considère le repère orthogonal d'axes X'_1OX_1 et Y'_1OY_1 de même origine que le premier repère, défini de la façon suivante; relativement au repère d'axes $X'OX$ et $Y'OY$, le vecteur unitaire \vec{I}_1 de l'axe X'_1OX_1 a pour composantes $(+1; +1)$; le vecteur unitaire \vec{J}_1 de l'axe Y'_1OY_1 a pour composante $(-1; +1)$.
Exprimer les coordonnées $(X_1; Y_1)$ d'un point M de P relativement à ce nouveau repère, en fonction de ses coordonnées $(X; Y)$ relativement au repère d'axes $X'OX$ et $Y'OY$.
4. On suppose, dans cette question, que m est, dans le plan p , un mobile dont les coordonnées s'expriment en fonction du temps t par

$$x = t \quad \text{et} \quad y = 1 - t.$$

Exprimer en fonction du temps les coordonnées du mobile $M = T(m)$ par rapport au repère X_1OY_1 .

Démontrer que la trajectoire du mobile M dans P est une parabole, dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.

Quelle est l'image par l'application T de la droite du plan p qui a pour équation

$$x + y = 1?$$