Baccalauréat C Cameroun juin 1971

Exercice 1

Soit (G, T) un groupe, T désignant la loi de composition interne sur l'ensemble G.
Soit a un élément quelconque de G; on considère l'application de G dans G

$$f_a : x \longmapsto a\mathrm{T}x.$$

1. Montrer que f_a est une application bijective.
2. Soit F l'ensemble de toutes les applications f_a, où a parcourt G. On munit F de la loi de composition des applications, notée $\circ$.

   On considère l'application $\varphi : a \longmapsto f_a$ de G dans F. Montrer que φ est un isomorphisme de (G, T) dans $(F, \circ)$.

Exercice 2

1. Étudier la fonction réelle de variable réelle, f, définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{Log}\,(x+1)}{(x+1)^2}.$$

   Construire la courbe représentative (Γ) de f.
2. Chercher la dérivée de la fonction F réelle de variable réelle, définie par

$$F(x) = -\frac{\mathrm{Log}\,(x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1}.$$

   En déduire l'aire limitée par (Γ), l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = X$ (avec $X > 0$).

   Cette aire a-t-elle une limite quand X tend vers plus l'infini ?

Problème

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère les points $\mathrm{F}(c\,;\ 0)$ et $\mathrm{F}'(-c\,;\ 0)$, c étant un nombre réel donné, non nul.
On considère le point M tel que

$$\left(\vec{\imath},\ \overrightarrow{\mathrm{F}M}\right) \equiv \varphi\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\vec{\imath}',\ \overrightarrow{\mathrm{F}'M}\right) \equiv \varphi'\ [2\pi],$$

φ et φ' étant deux nombres réels tels que $\varphi - \varphi'$ ne soit pas un multiple entier de π.

1. On pose $\mathrm{F}M = r$ et $\mathrm{F}'M = r'$.

   Exprimer les coordonnées x et y de M :

   a. en fonction de c, r et φ.

   b. en fonction de c, r' et φ'.

c. En déduire que

$$x = c.\frac{\sin\left(\varphi + \varphi'\right)}{\sin\left(\varphi - \varphi'\right)} \quad \text{et} \quad y = c.\frac{\sin\varphi \sin\varphi'}{\sin\left(\varphi - \varphi'\right)}$$

2. On suppose 1 que, k étant un nombre réel positif, distinct de 1, on a $r' = kr$.
Quelle est l'équation cartésienne de la courbe (C_1) à laquelle appartient alors le point M ? Reconnaître cette courbe. Interpréter géométriquement ce résultat.

3. Soit α un nombre réel donné, qui n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$. On suppose $\varphi - \varphi' = \alpha\,[2\pi]$.
Exprimer $rr' \sin\left(\varphi - \varphi'\right)$ et $rr' \cos\left(\varphi - \varphi'\right)$ en fonction de x, c et y.
En déduire que le point M appartient à un cercle (C_2), dont on donnera l'équation.

4. On suppose maintenant que $\varphi + \varphi' \equiv \beta\,[2\pi]$, β étant un nombre réel différent de tout multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

a. Exprimer $rr' \sin\left(\varphi + \varphi'\right)$ et $rr' \cos\left(\varphi + \varphi'\right)$ en fonction de x, c et y.
En déduire l'équation cartésienne de la courbe (C_3) à laquelle appartient alors M.

b. On prend pour nouveau repère le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ déduit du précédent par une rotation $\mathscr{R}\left(\text{O},~\frac{\beta}{2}\right)$.
En déduire l'équation de (C_3) dans ce nouveau repère et reconnaître la courbe (C_3). Préciser ses éléments.