

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Cameroun septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé xOy , on considère le cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

et le point A de coordonnées (+5 ; +5).

1. Écrire l'équation de la polaire de A par rapport au cercle (C).
2. Déterminer les coordonnées des points de contact avec (C) des tangentes à (C) issues de A.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps, \mathbb{C} , des nombres complexes, l'équation

$$3z^4 + 2z^2 + i = 0.$$

PROBLÈME

Partie A

medskip

On considère l'application f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2

$$f : (x ; y) \mapsto (x' ; y')$$

définie par

$$x' = ax - by \quad \text{et} \quad y' = bx + ay,$$

a et b étant deux nombres réels vérifiant la relation

$$a^2 + b^2 = 1.$$

L'application f est-elle surjective et injective?

Soit \mathcal{F} l'ensemble des applications f obtenues en donnant à a et à b toutes les valeurs possibles (avec toujours $a^2 + b^2 = 1$). Montrer que, quels que soient les éléments f et g de \mathcal{F} , le composé $g \circ f$ (au sens de la composition des applications) est encore un élément de \mathcal{F} et que \mathcal{F} a une structure de groupe abélien pour cette loi.

Partie B

Démontrer l'implication

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a| \leq 1 \quad \text{et} \quad |b| \leq 1.$$

La réciproque est-elle vraie?

Montrer que l'application f peut se mettre sous la forme trigonométrique

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

Donner la forme de $h = g \circ f$. En déduire celle de

$$f^2 = f \circ f.$$

Démontrer par récurrence que la forme de f^n est

$$\begin{cases} x' = x \cos n\theta - y \sin n\theta, \\ y' = x \sin n\theta + y \cos n\theta. \end{cases}$$

Application numérique :

$$f : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \end{cases} \quad g : \begin{cases} X' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y), \\ Y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y). \end{cases}$$

Calculer le produit $h = g \circ f$. Calculer le produit $h = g \circ f$ lorsque f et g sont écrites sous forme trigonométrique et déduire des calculs précédents les valeurs $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Partie C

Soit un repère orthonormé de vecteurs unitaires \vec{i} (1 ; 0) et \vec{j} (0 ; 1) et les points $M(x ; y)$ et $M'(x' ; y')$ avec

$$M' = f(M) \quad \begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

Montrer que, si M décrit la droite (D), d'équation

$$ux + vy + w = 0,$$

M' décrit une droite (D') dont on formera l'équation.

Montrer que le birapport de 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 de (D) s'exprime uniquement en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 ou y_1, y_2, y_3, y_4 (coordonnées respectives de ces points).

Montrer que $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$.

On rappelle que le birapport de quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 est le nombre

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$