

∞ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2002 ∞

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
 - a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
 - b. Déterminer la limite de la suite w .
2.
 - a. Montrer que la suite u est croissante.
 - b. Montrer que la suite v est décroissante.
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
3. On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera ℓ .
4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
 - a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.
 - b. Déterminer alors la valeur de ℓ .

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{i}{2}$.

\mathcal{T} est l'application qui, à tout point M, d'affixe z , distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$2zz' = i(z + z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_I = 1$, $z_J = i$. Soit K le milieu du segment [IJ].
 - a. Déterminer l'affixe z_K de K.
 - b. Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application \mathcal{T} .
 - c. En déduire que \mathcal{T} ne conserve pas les milieux.
2. Déterminer les points invariants par \mathcal{T} .
3. Montrer que $M' = \mathcal{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

4. En déduire l'image par \mathcal{T} du cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon 1.

Exercice 2

5 points

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x ; y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$E : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation **E**.
2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
 - a. Montrer que x et y sont de parités différentes.
 - b. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p .
 - c. En déduire que x et y sont premiers entre eux.
3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
 - a. Vérifier qu'alors le couple $(|u^2 - v^2| ; 2uv)$ est solution de l'équation **E**.
 - b. Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.
4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.
 - a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés?
 - b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

PROBLÈME

11 points

Pour chaque entier naturel n , on définit, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ la fonction notée f_n par :

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x,$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A : Étude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
2. Résolution graphique d'une inéquation :
 - a. Justifier graphiquement l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout réel } u, e^u \geq u + 1.$$

- b. En déduire que pour tout réel x ,

$$e^{-x} + x - 1 \geq 0, \text{ puis que, } 1 + (x - 1)e^x \geq 0.$$

3. Limites :

- a. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
- b. Déterminer la limite de f_0 en 0.

4. Sens de variations :

- a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ on a $f_0'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.
- b. En déduire le sens de variation de f_0 .

5. On appelle \mathcal{C}_0 la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) pour lequel l'unité graphique est 2 cm.

Tracer \mathcal{C}_0 dans ce repère et placer le point A de coordonnées (0; 1).

Partie B : Étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$

On appelle \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) précédent.

- 1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- 2. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.
En déduire que \mathcal{C}_n possède une asymptote qu'on précisera.
- 3. Étudier les positions respectives des courbes \mathcal{C}_{n+1} et \mathcal{C}_n .
- 4. Montrer que toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
- 5. a. Montrer qu'il existe un unique réel α_1 , appartenant à l'intervalle $[0,2 ; 0,9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
b. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.
c. Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1 ; 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
- 6. a. En utilisant la **partie A** montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; 1]$,

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$, puis que, $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.
- c. Déterminer la limite de la suite (α_n) .
- 7. Construire sur le graphique précédent, les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on appelle I_n l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) dx.$$

- 1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

2. Étudier le sens de variation de la suite (I_n) .
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes \mathcal{C}_{n+1} , et \mathcal{C}_n et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$ est constante.