

Durée : 4 heures

**Baccalauréat S Centres étrangers 14 juin 2010****EXERCICE 1****4 points****Commun à tous les candidats**

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

**Question 1**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  de représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

*Affirmation :*

Les droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  sont orthogonales.

**Question 2**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le point A de coordonnées  $(2; -1; 3)$  et la droite  $(\mathcal{D})$  de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

*Affirmation :*

Le plan  $(\mathcal{P})$  contenant le point A et orthogonal à la droite  $(\mathcal{D})$  a pour équation :  $2x + y - z = 0$ .

**Question 3**

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0003$ .

On rappelle que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

*Affirmation :*

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à 0,5.

**Question 4**

A et B sont deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0,4, \quad p_A(B) = 0,7 \quad \text{et} \quad p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,1.$$

*Affirmation :*

La probabilité de l'évènement  $A$  sachant que l'évènement  $B$  est réalisé est égale à  $\frac{14}{41}$ .

**EXERCICE 2****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe  $(\mathcal{P})$  muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 4 cm, on considère le point  $A$  d'affixe  $a = -1$  et l'application  $f$ , du plan  $(\mathcal{P})$  dans lui-même, qui au point  $M$  d'affixe  $z$ , distinct de  $A$ , associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points  $M$  tels que  $M' = M$ .
2. Démontrer que pour tout point  $M$  distinct de  $A$  et de  $O$ , on a :

$$\arg \frac{OM'}{AM} \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. **a.** Soit  $B$  le point d'affixe  $b = -\frac{1}{2} + i$ .  
Placer dans le repère le point  $B$  et la médiatrice  $(\Delta)$  du segment  $[OA]$ .
- b.** Calculer sous forme algébrique l'affixe  $b'$  du point  $B'$  image du point  $B$  par  $f$ .  
Établir que  $B'$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $O$  et de rayon 1.  
Placer le point  $B'$  et tracer le cercle  $(\mathcal{C})$  dans le repère.
- c.** En utilisant la question 2, démontrer que, si un point  $M$  appartient à la médiatrice  $(\Delta)$ , son image  $M'$  par  $f$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .
- d.** Soit  $C$  le point tel que le triangle  $AOC$  soit équilatéral direct.  
En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point  $C$  par  $f$  (On laissera apparents les traits de construction.)
4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  distincts de  $A$  et de  $O$  dont l'image  $M'$  par  $f$  appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.

- a.** On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels tels que  $(x, y) \neq (-1, 0)$  et  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
Démontrer que la partie imaginaire de  $z'$  est égale à :

$$\operatorname{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble  $(\Gamma)$  et le tracer dans le repère.

- b.** À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble  $(\Gamma)$ .

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, b = -1 + 2i, c = 2 + 3i, m = 7 - 5i, n = 5 - i, p = 9 + i.$$

1. a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.
- b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.
- c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

*Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.*

2. Une similitude directe

Soit  $s$  la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

- a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude  $s$  est :

$$z' = \left( -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \right) z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i.$$

- b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude  $s$ .
- c. Vérifier que la similitude  $s$  transforme le point C en M.

3. Une similitude indirecte

Soit  $s'$  la similitude dont l'écriture complexe est :

$$z' = 2i\bar{z} + 3 - 3i.$$

- a. Vérifier que : 
$$\begin{cases} s'(A) = N \\ s'(B) = M \\ s'(C) = P \end{cases}$$

- b. Démontrer que  $s'$  admet un unique point invariant K d'affixe  $k = 1 - i$ .
- c. Soit  $h$  l'homothétie de centre K et de rapport  $\frac{1}{2}$  et J le point d'affixe 2.

On pose :  $f = s' \circ h$ .

Déterminer les images des points K et J par la transformation  $f$ . En déduire la nature précise de la transformation  $f$ .

- d. Démontrer que la similitude  $s'$  est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

### EXERCICE 3

6 points

#### Commun à tous les candidats

On considère les deux courbes  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  d'équations respectives  $y = e^x$  et  $y = -x^2 - 1$  dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente  $\mathcal{T}$  commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.  
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe ( $\mathcal{C}_1$ ) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe ( $\mathcal{C}_2$ ).
2. On désigne par  $a$  et  $b$  deux réels quelconques, par A le point d'abscisse  $a$  de la courbe ( $\mathcal{C}_1$ ) et par B le point d'abscisse  $b$  de la courbe ( $\mathcal{C}_2$ ).
  - a. Déterminer une équation de la tangente ( $\mathcal{T}_A$ ) à la courbe ( $\mathcal{C}_1$ ) au point A.
  - b. Déterminer une équation de la tangente ( $\mathcal{T}_B$ ) à la courbe ( $\mathcal{C}_2$ ) au point B.
  - c. En déduire que les droites ( $\mathcal{T}_A$ ) et ( $\mathcal{T}_B$ ) sont confondues si et seulement si les réels  $a$  et  $b$  sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a & = -2b \\ e^a - ae^a & = b^2 - 1 \end{cases} .$$

- d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :

$$\begin{cases} e^a & = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 & = 0 \end{cases} .$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

- a. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $] -\infty ; 0[$ ,  $e^{2x} - 4 < 0$  et  $4e^x(x - 1) < 0$ .
  - b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle  $] -\infty ; 0[$ .
  - c. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
  - d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .  
On note  $a$  cette solution. Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $a$ .
4. On prend pour A le point d'abscisse  $a$ . Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  du réel  $b$  pour lequel les droites ( $\mathcal{T}_A$ ) et ( $\mathcal{T}_B$ ) sont confondues.

#### EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites  $(u_n)$  définies par un premier terme positif ou nul  $u_0$  et vérifiant pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction  $f$ 
  - a. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
  - b. Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  l'équation  $f(x) = x$ .  
On note  $\alpha$  la solution.
  - c. Montrer que si  $x$  appartient à l'intervalle  $[0 ; \alpha]$ , alors  $f(x)$  appartient à l'intervalle  $[0 ; \alpha]$ .  
De même, montrer que si  $x$  appartient à l'intervalle  $[\alpha ; +\infty[$  alors  $f(x)$  appartient à l'intervalle  $[\alpha ; +\infty[$ .
2. Étude de la suite  $(u_n)$  pour  $u_0 = 0$

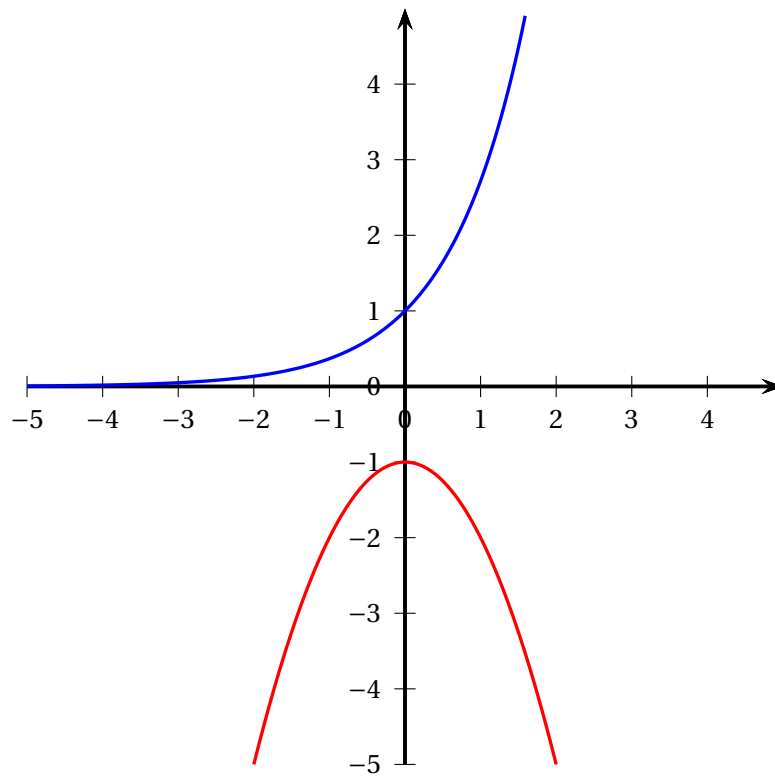
Dans cette question, on considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

- a. Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations  $y = x$  et  $y = f(x)$ .  
Placer le point  $A_0$  de coordonnées  $(u_0 ; 0)$ , et, en utilisant ces courbes, construire à partir de  $A_0$  les points  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .  
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
  - b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .
  - c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
3. Étude des suites  $(u_n)$  selon les valeurs du réel positif ou nul  $u_0$

*Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite  $(u_n)$  suivant les valeurs du réel positif ou nul  $u_0$  ?

**FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)****Annexe 1 (Exercice 3, question 1)****Annexe 2 (Exercice 4, question 2. a.)**

