

♣ Baccalauréat C Centres étrangers septembre 1977 ♣

EXERCICE 1

1. Montrer que, selon que l'entier naturel n est pair ou impair, l'entier n^4 est congru modulo 16 à 0 ou à 1.
2. Soit A l'anneau $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +, \times)$, dont on désigne les éléments par $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots$
Expliciter l'ensemble S des solutions de l'équation : $x^4 = \dot{1}$, dans laquelle l'inconnue est l'élément x de A .
Étant donné le naturel k tel que $1 \leq k \leq 15$, on considère l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=k} (x_i)^4 = k$$

dans laquelle l'inconnue est l'élément (x_1, \dots, x_k) de A^k .

Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est S^k (A^k et S^k désignent respectivement les produits de k ensembles égaux à A et de k ensembles égaux à S).

EXERCICE 2

Dans un espace vectoriel euclidien E , de dimension 3, on donne deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} dont le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$ n'est pas nul.

À tout réel k on associe l'endomorphisme u_k de E (c'est-à-dire l'application linéaire de E dans lui-même) qui est déterminé par

$$u_k(\vec{X}) = (\vec{B} \cdot \vec{X}) \vec{A} + k \vec{X}$$

(en désignant par $(\vec{B} \cdot \vec{X}) \vec{A}$ le vecteur obtenu en multipliant le vecteur \vec{A} par le réel $\vec{B} \cdot \vec{X}$).

1. Montrer que le plan vectoriel (P) ensemble des vecteurs de E orthogonaux à \vec{B} et la droite vectorielle (D) ensemble des vecteurs de E colinéaires à \vec{A} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
Montrer qu'un vecteur \vec{Y} de (P) et un vecteur \vec{Z} de (D) sont respectivement transformés par u_k en des vecteurs de la forme $\lambda_k \vec{Y}$ et $\mu_k \vec{Z}$, λ_k et μ_k désignant des réels que l'on exprimera en fonction de k (et, éventuellement, de \vec{A} et \vec{B}).
2. Déterminer le noyau N_k et l'image I_k de l'endomorphisme u_k : on étudiera chacun des cas qui se présenteront ; on montrera que, en général, u_k est inversible.

PROBLÈME

1. Soit H l'application, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , déterminée par

$$\begin{aligned} H(x) &= -x + \frac{3}{4} & \text{si } x \leq 0, \\ H(x) &= x - \frac{3}{4} & \text{si } x \geq 1, \\ H(x) &= \frac{x^4}{2} - x + \frac{3}{4} & \text{si } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

- a. Montrer que H est continue et admet une dérivée $H'(x)$ en tout point x de \mathbb{R} ; montrer que H' est une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
En quels points de \mathbb{R} l'application H admet-elle une dérivée seconde?
- b. Étudier les variations des applications H et H' ; les représenter graphiquement dans un même plan rapporté à un repère orthonormé (unité de longueur : 4 cm).
2. Soit g une application continue du segment $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . On lui associe l'application G , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , déterminée par

$$G(x) = \int_0^1 |x-t|g(t) dt.$$

- a. On suppose d'abord $x \in [0; 1]$. Montrer qu'en considérant le segment $[0; 1]$ comme la réunion des segments $[0; x]$ et $[x; 1]$ on peut exprimer $G(x)$ à l'aide des intégrales

$$A(x) = \int_0^x g(t) dt \quad \text{et} \quad B(x) = \int_x^1 g(t) dt$$

et des nombres $a = A(1)$ et $b = B(1)$.

- b. Montrer que, sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$, G coïncide avec une fonction affine.
- c. Dans le cas particulier $g(t) = t^2$, comparer G à l'application H étudiée au 1.
3. a. En revenant au cas général, montrer que G est continue et admet une dérivée en tout point de \mathbb{R} ; montrer que G' est une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
En quels points de \mathbb{R} l'application G admet-elle une dérivée seconde?
- b. On admet que l'on a défini l'addition de deux fonctions réelles d'une variable réelle, le produit de l'une de ces fonctions par un réel et que l'on a montré que ces opérations permettent de munir d'une structure d'espace vectoriel chacun des ensembles \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement constitués par les applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} et par les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui admettent une dérivée continue.
Montrer qu'en posant $\varphi(g) = G$, on détermine une application linéaire φ de \mathcal{E} dans \mathcal{F} .

4. On reprend les notations du 2. a. et on se limite à $x \in [0; 1]$.
Exprimer $G(x)$ sans signe d'intégration dans le cas où g est la dérivée seconde d'une application donnée, f , de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} ; pour cela on montrera que, dans ce cas

$$\begin{aligned} A(x) &= f'(x) - f'(0) \\ B(x) &= x f'(x) - f(x) + f(0). \end{aligned}$$

Déduire de cette étude que, pour toute application f de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} admettant une dérivée seconde continue, on peut écrire, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t| f''(t) dt,$$

α et β désignant des constantes, que l'on exprimera en fonction de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.