

☞ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2000 ☞

Exercice 1

5 points

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.
 - a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
 E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »
 E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »
 - b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.
Établir la loi de probabilité de X .
Calculer l'espérance mathématique de X .
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
On effectue ainsi k tirages successifs.
Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges?

Exercice 2 (obligatoire)

5 points

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) représente le sol.

Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1) \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \\ z = 2 \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \quad (D_2) \begin{cases} x = 0,5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} \text{ avec } b \in \mathbb{R}.$$

1.
 - a. Indiquer les coordonnées d'un vecteur \vec{u}_1 directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur \vec{u}_2 directeur de la droite (D_2) .
 - b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.
2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S(3; 4; 0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2) .
 - a. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1) .
 - b. Montrer que (D_1) est sécante à (P_2) .

- c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2) . Cette affirmation est-elle vraie? Justifier la réponse.

Exercice 2 (spécialité)**5 points**

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que

$$AB = BC = CD = DA = 5 \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}.$$

On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].

On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(A) = B$, $f(B) = O$, $f(D) = C$.
 - a. Prouver que f est un antidéplacement.
 - b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f , alors M est équidistant des points A, B, C, D.
 - c. L'isométrie f admet-elle un point invariant?
2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
 - a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.
 - b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?
3. Soit s_1 , la symétrie orthogonale d'axe (BC).
 - a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2 , telle que $r = s_1 \circ s_2$.
 - b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, où t_1 est une translation que l'on précisera.
4. Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.
 - a. Déterminer $g(D)$, $g(I)$, $g(O)$. En déduire la nature précise de la transformation g .
 - b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

Problème**10 points**

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x},$$

puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A - Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x - 1) \ln(x - 1).$$

- On admet le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.
- Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
- Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x - 1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
- Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α , dans l'intervalle $[e + 1; e^3 + 1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1; \alpha[$ et $] \alpha; +\infty[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
- Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1; \sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $] \sqrt{\alpha}; +\infty[$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on a

$$f(x) = \varphi(e^x).$$

2. En déduire :

- La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
- La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

| | | | | | | |
|--------|-----|-----|---|-----|---|---|
| x | 0,1 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | | | | | | |

5. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, On prendra 10 comme valeur approchée de α .

Partie C - Recherche de primitives de f

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

2. On pose $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.