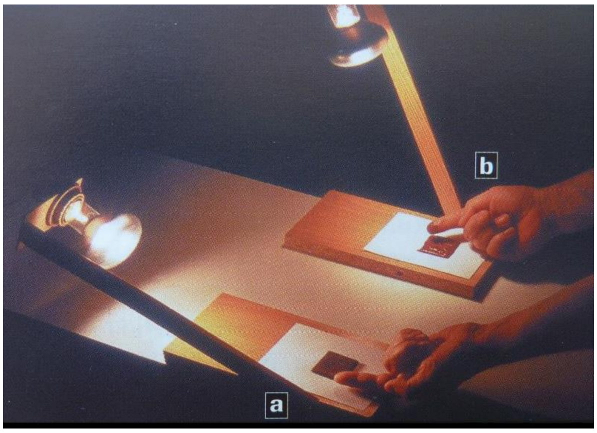
CHAPITRE 8 DES SINUS POUR TOUS LES ANGLES

Problème N°1 L'inclinaison des rayons pour le chocolat

Pourquoi fait-il plus chaud en été qu'en hiver alors que la distance de la Terre au Soleil n'a quasiment pas varié ? Pour répondre à cette question, on peut faire une expérience[1].

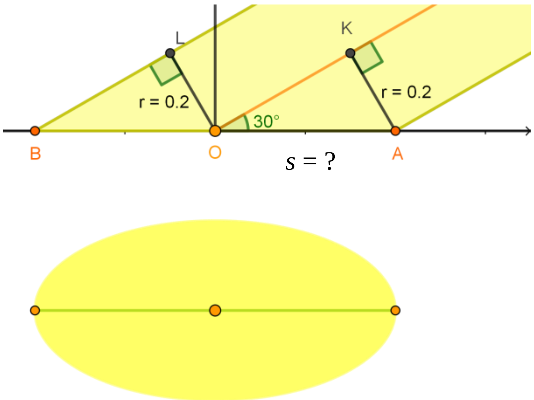


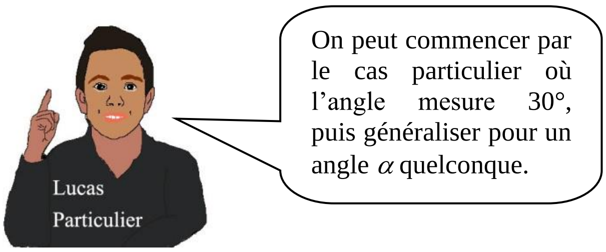
Deux carrés de chocolat identiques sont éclairés par des lampes suivant des angles différents. Le chocolat fond plus vite lorsque la direction des rayons lumineux est perpendiculaire aux carrés de chocolat.

Nous allons étudier comment l'inclinaison intervient sur la chaleur reçue. Imaginons un rayon de soleil comme un cylindre dont l'axe central a la direction de la droite joignant le centre du Soleil au centre de la Terre. Et considérons le lieu de l'impact avec la Terre comme une portion de plan. Lorsque le rayon arrive sur ce plan perpendiculairement, il dessine un disque lumineux sur le plan. Mais s'il arrive de façon oblique, il dessine une portion ovale et nous appelons le bord une ellipse. Nous allons montrer que cette ellipse est obtenue en étirant le disque. Résultat : la même énergie est envoyée sur une surface plus grande, donc l'intensité lumineuse en chaque point est plus faible.

Voici une coupe dans le plan où se déplace la lampe, qui contient la direction du rayon lumineux et la perpendiculaire au sol au point d'impact, et, en dessous, la tache de lumière pour différents angles.

Considérons que le cylindre lumineux a pour rayon AK = r = 0,2 et forme un angle α° avec le sol. Quelle relation relie l'angle α°, le rayon fixe r du cylindre et la distance s = OA ?





Peux-tu imaginer la construction pour un autre point de l'ellipse ?
Peux-tu tracer l'ellipse entière pour un angle de 30° ? Pour un autre angle ?
Et que se passe-t-il si l'angle atteint ou dépasse 90° ?
Peux-tu comparer l'aire de l'intérieur de l'ellipse pour un angle de α° avec celle du disque correspondant à α = 0° ?
Que peut-on dire de l'énergie reçue par chaque point pour α° par rapport à 0° ?

[1] Expérience proposée par l'IREM de Poitiers et le CLEA
Voir http://clea-astro.eu/archives/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_129.pdf pages 11 à 13.

PROBLEME 1 **L'inclinaison des rayons pour le chocolat** *Indications et démonstrations*

Si l'angle $\alpha°$ vaut 30°, alors le triangle AOK est un demi-triangle équilatéral et AK a pour longueur la moitié de OA.

De façon plus générale, le triangle AOK étant rectangle en K, le sinus de l'angle $\alpha = \widehat{\mathrm{AOK}}$ est $\sin(\alpha°) = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{OA}} = \frac{r}{s}$. En particulier, si $\alpha°$ = 30° et r = 0,2, on obtient $\frac{1}{2} = \frac{0{,}2}{s}$ donc s = 0,4.

Dans le cas général, $s = \frac{r}{\sin(\alpha°)}$.

Pour construire l'ellipse dans le cas général, nous allons montrer qu'en partant du cercle de rayon 0,2, il faut dilater chaque segment parallèle à (OA) dans un rapport 1/sin($\alpha°$), et pour $\alpha°$ = 30°, ce rapport vaut 1/0,5 = 2.

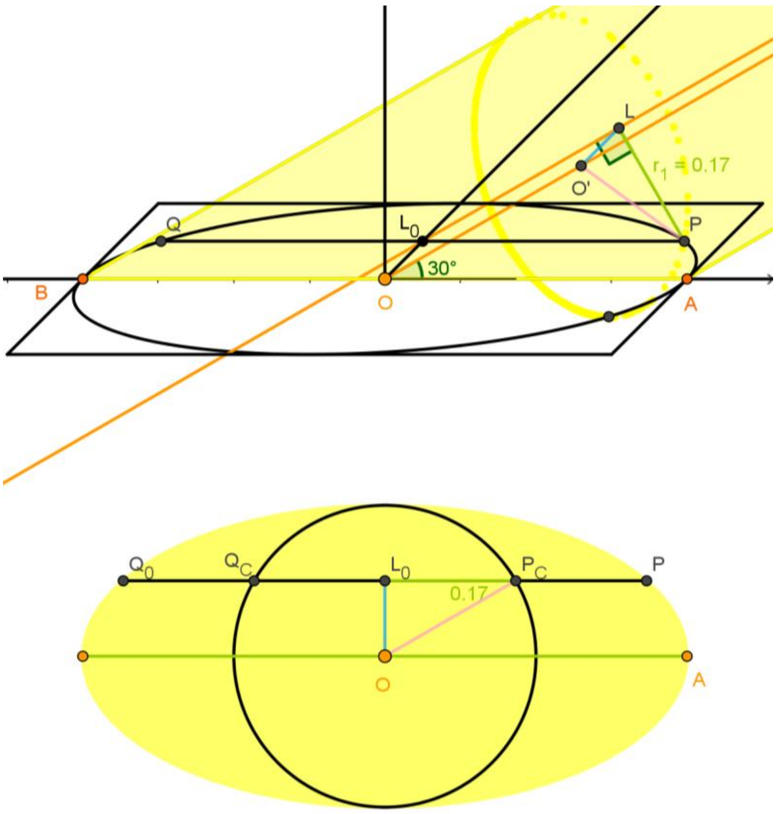
Partons d'un point P situé sur le bord de la tache lumineuse sur le plan (voir figure ci-dessous). Considérons la droite verticale perpendiculaire au plan du sol en O, et l'axe perpendiculaire à cette droite et à (OA), autrement dit l'axe perpendiculaire au plan de coupe précédent au point O. Soit L_0 le projeté orthogonal de P sur cet axe.

Le plan orthogonal à l'axe du cylindre lumineux qui passe par P coupe le cylindre selon un cercle de centre O' et de rayon r (en rose). La droite parallèle à l'axe (OO') du cylindre passant par L_0 coupe l'intérieur de ce cercle en L. Le plan (LO'P) est perpendiculaire à la droite (OO') donc aussi à la droite (L_0L) donc la droite (LP) est perpendiculaire en L à (L_0L).

L'angle $\widehat{\mathrm{PL_0L}}$ est égal à l'angle $\widehat{\mathrm{AOO'}} = \hat{\alpha}$ car les droites (PL_0) et (L_0L) sont parallèles à (AO) et (OO'). Ainsi dans le triangle L_0LP rectangle en L, $\sin(\alpha°) = \frac{\mathrm{LP}}{\mathrm{L_0P}}$ d'où : $\mathrm{L_0P} = \frac{\mathrm{LP}}{\sin(\alpha°)}$

Si on trace sur le plan du sol, le cercle de centre O et de rayon r et si on appelle P_C le point d'intersection de [L_0P] avec ce cercle, comme OL_0 = O'L, alors L_0P_C = LP et donc :

$\mathrm{L_0P} = \frac{\mathrm{L_0P_C}}{\sin(\alpha°)}$. Pour $\alpha°$ = 30° il suffit pour chaque point P_C du cercle, de déterminer le projeté orthogonal L_0 de P_C sur la droite perpendiculaire à (OA) puis P est le symétrique de L_0 par rapport à P_C ce qui revient à dilater le segment [L_0P_C] d'un facteur 2 = 1/sin($\alpha°$).



Pour le point Q la construction est symétrique par rapport à la droite (OL_0).

On remarque que pour $\alpha°$ = 180°– 30° = 150°, la construction serait la même par symétrie par rapport au plan perpendiculaire à (OA) en O.

Cela conduit à penser que l'on peut définir le sinus pour un angle compris entre 90° et 180° par :

sin(180° – $\alpha°$) = sin($\alpha°$).

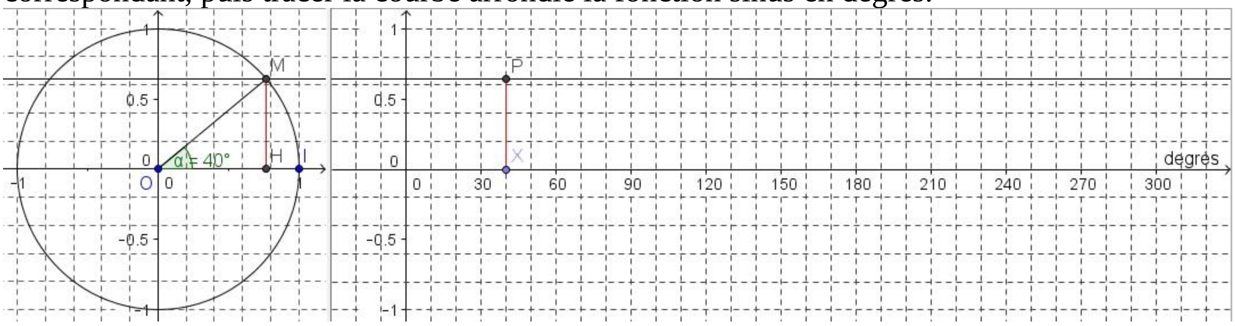
Pour 90°, le cercle n'est pas déformé, le facteur est 1.

Pour 0°, la construction n'est plus possible.

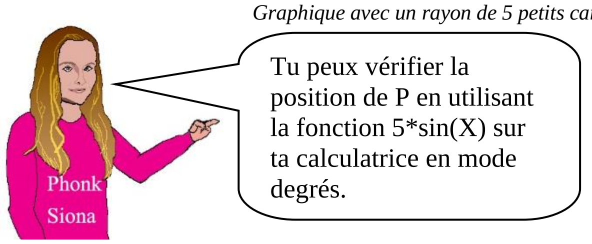
Si on dilate une figure géométrique plane selon une direction d'un facteur k, son aire est multipliée par k, si on la dilate selon deux directions distinctes d'un même rapport k, on obtient un agrandissement de rapport k et son aire est multipliée par k^2.
Compare, par exemple, l'aire des triangles OP_CL_0 et OPL_0.
Pour un angle α° strictement compris entre 0° et 180°, le cercle est dilaté selon une direction du facteur 1/sin(α) donc l'aire est multipliée par 1/sin(α°) avec 0 < sin(α°) ≤ 1 donc 1/sin(α°) ≥ 1.
En déduire l'aire de l'ellipse dans le cas où α = 30°.
Pour une inclinaison d'un angle α° par rapport au sol, la même quantité d'énergie lumineuse que pour 90° est distribuée sur une surface k fois plus grande, que peut-on dire de l'énergie reçue par chaque point dans ce cas ?

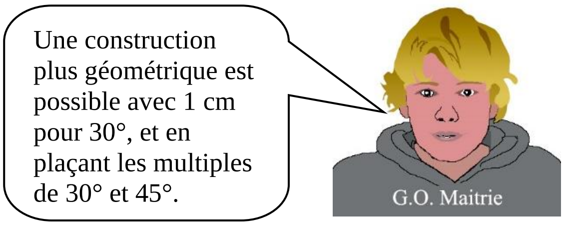
<u>Problème N°2</u> La fonction sinus en degré

Comment définir la fonction sinus pour tous les angles de – 180° à + 180° et même au-delà ?
Reproduis la figure ci-dessous sur une feuille quadrillée à petits carreaux de préférence, en position portrait □. Le cercle a un rayon de 5 cm pour que la figure soit précise. L'axe horizontal du deuxième graphique doit être dans le prolongement du diamètre horizontal et l'unité verticale doit être exactement égale au rayon, par contre l'unité horizontale est libre ; on peut prendre 1 petit carreau pour 10 degrés. Pour chaque angle α° mesuré de $\overrightarrow{OI}$ à $\overrightarrow{OM}$, l'ordonnée du point M du cercle fourni le sinus puisque $\sin(\alpha°) = \frac{\text{MH}}{\text{OM}} = \frac{\text{MH}}{1}$. Le symétrique de M par rapport au diamètre vertical donne un point de même ordonnée que M et qui correspond à un angle de 180° – α°. Il est donc possible ainsi de définir le sinus d'un angle de plus de 90°. Entre 180° et 360°, l'ordonnée de M sera négative, donc aussi sin(α°).
Avec un rapporteur, repérer les angles de 10° en 10° sur le cercle et placer le point P correspondant, puis tracer la courbe arrondie la fonction sinus en degrés.



Graphique avec un rayon de 5 petits carreaux





Remarque : L'abscisse du point M est le cosinus de l'angle α°. On définit ainsi la fonction cos.

<u>Problème N°3</u> Diagramme circulaire

Le professeur de SES a demandé aux élèves de réaliser un diagramme circulaire de 5 cm de rayon de la répartition du chiffre d'affaires, bio par circuit de distribution en France en 2018, en milliards d'euros.

Type de distribution	Distribution spécialisée bio	Artisans commerçants	Vente directe	Restauration	Grandes et moyennes surfaces
Chiffre d'affaires bio	3,2	0,4	1,1	0,5	4,5

Comment faire ce travail avec sa calculatrice mais sans rapporteur ?

PROBLEME 2 La fonction sinus en degré *Indications*

Si on utilise les multiples de 30° et de 45°, on obtient des valeurs particulières pour les sinus :
L'angle de 30° correspond à un demi-triangle équilatéral, le sinus vaut alors ½.
L'angle de 45° conduit à calculer les côtés d'un triangle rectangle d'hypoténuse 1, ce qui donne une valeur facilement arrondie à 0,1 près.
Et l'angle de 60°conduit à calculer la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

PROBLEME 3 Diagramme circulaire *Indications*

Calcule d'abord le montant total et le pourcentage de chaque type de distribution par rapport à l'ensemble, puis l'angle par proportionnalité, le tout correspondant à 360°. Calcule ensuite le cumul des angles et enfin place le point du cercle correspondant à chaque angle $\alpha°$ qui a pour coordonnées (5 cos($\alpha°$) ; 5 sin($\alpha°$)) dans un repère dont l'origine est le centre du disque.

Type de distribution	Distribution spécialisée bio	Artisans commerçants	Vente directe	Restauration	Grandes et moyennes surfaces	Total
Chiffre d'affaires bio	3,2	0,4	1,1	0,5	4,5	9,7
Pourcentage	33 %	4%				100 %
Angle	119°	15°				360°
Angle cumulé	119°	134°			360°	
5 cos($\alpha°$)	– 2,4	– 3,4			5	
5 sin($\alpha°$)	4,4	3,6			0	

Remarque : La mesure des angles suppose de choisir un sens. Les mathématiciens choisissent de partir du premier vecteur $\vec{\imath}$ du repère vers le second $\vec{\jmath}$. Ainsi le sens trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Problème N°4 La sinusoïde du LA

La note LA_3 a pour fréquence 440 Hz, autrement dit la même courbe se reproduit 440 fois chaque seconde. La période, c'est-à-dire la durée correspondant à un élément de courbe reproduit 440 fois, est donc $p = 1/440$ seconde. L'intensité du son LA_3 en fonction du temps est représentée par une sinusoïde, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire à l'aide de la fonction sinus.
Pour la fonction sinus en degrés, la période est 360°. Pour trouver l'angle correspondant à l'instant t en seconde, il faudra d'abord évaluer ce que représente t par rapport à une période p soit t/p et multiplier cette proportion par 360°. L'amplitude a correspond à la valeur maximale et à l'opposé de la valeur minimale, il faudra multiplier la fonction sin par l'amplitude.

a) Donne la formule de l'intensité en fonction du temps t en secondes pour la note LA_3 avec une amplitude de 10. Affiche la courbe sur ta calculatrice sur l'intervalle [0 ; 0,01].

b) Donne la formule de l'intensité en fonction du temps t en secondes pour la note LA_4 de fréquence 880 Hz avec une amplitude de 5. Affiche la courbe sur ta calculatrice.

c) Donne la formule de la fonction pour une note de fréquence f Hz avec une amplitude a.

Problème N°5 La marée

Le 2 Novembre 2019, dans le port de Saint-Malo, la mer était basse à 4h42min à une hauteur de 2,96 m, puis elle a monté jusqu'à 10h06min à 10,96 m. On considère que la fonction qui au temps t en heures associe la hauteur de la mer en mètres, est une fonction associée à la fonction sinus. Trouve sa formule.

Pour cela note qu'il faut convertir 4h42min en $4 + \frac{42}{60} = 4{,}7$ heures et 10h06min en $10 + \frac{6}{60} = 10{,}1$. Il faudra compter le temps à partir du milieu t_0 de l'intervalle [4,7 ; 10,1]. Le niveau moyen b correspondant à cet instant est la moyenne entre les hauteurs de la basse mer et de la haute mer et l'amplitude a est la moitié de la différence entre la haute et la basse mer. Enfin la période p correspond à 2 fois la durée écoulée entre la basse mer et la haute mer.

Problème N°6 Sinus pour tous les triangles

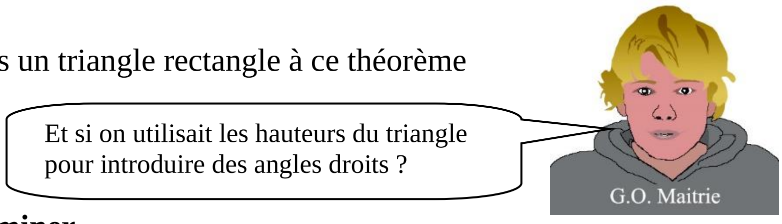
À l'époque de la révolution française de 1789, il a été décidé de créer une unité de mesure, le mètre, qui ne dépendrait pas du souverain, mais représenterait la 10 millionième partie d'un quart de méridien. Pour cela il a fallu mesurer une partie significative d'un méridien par triangulation. Il s'agissait à partir d'une longueur donnée de mesurer des angles de triangles pour en déduire les longueurs des côtés à partir d'un côté (voir la carte page 99).
Tu vas démontrer le théorème des sinus :
Dans tout triangle ABC, où a est la longueur du côté opposé à A, b à B et c à C :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

On considère bien sûr que le triangle n'est pas aplati donc les sinus et les numérateurs ne sont pas nuls. Cependant un angle peut mesurer 90° ou plus. Nous considérerons que le plus grand angle est en C. La somme des angles d'un triangle étant de 180° et aucun angle n'étant nul, les deux autres angles mesurent chacun moins de 90°. Tu devras envisager 3 cas :

- **a)** Tous les angles sont aigus (chacun mesure moins de 90°).
- **b)** Le triangle est rectangle en C.
- **c)** L'angle en C mesure plus de 90°.

Comment passer de la trigonométrie dans un triangle rectangle à ce théorème valable même sans angle droit ?



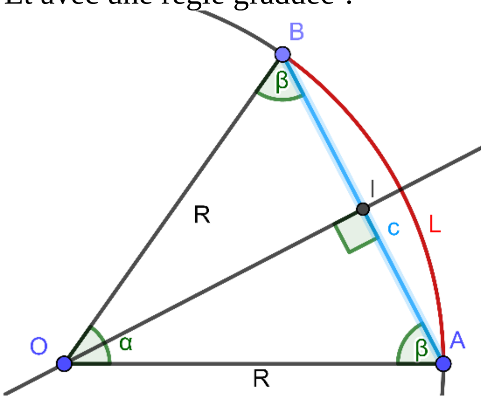
Problème N°7 Triangles à déterminer

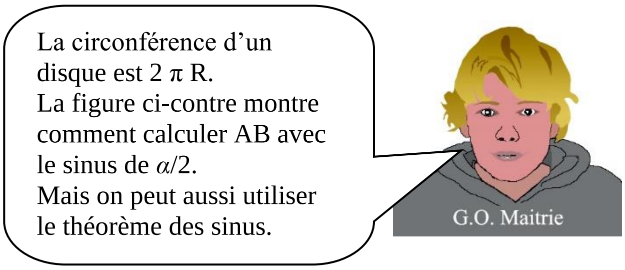
Calcule le troisième angle et les valeurs approchées des longueurs des côtés des triangles ABC avec les informations suivantes :

a) $\hat{A}$= 70°, $\hat{B}$= 50° et AB = 8. **b)** $\hat{A}$= 20°, $\hat{B}$= 40° et AB = 10. **c)** $\hat{A}$ = $\hat{B}$= 35° et AB = 77.
Le problème 10 donnera l'occasion de nouveaux calculs inspirés par la mesure du méridien.

Problème N°8 Le partage de la tarte

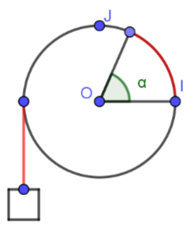
Vous devez partager une tarte circulaire de 30 cm de diamètre en 7 parts égales.
Vous disposez d'un mètre ruban. Comment procéder ?
Et avec une règle graduée ?





Problème N°9 Le treuil

La chaîne du seau d'un puits est enroulée sur un treuil de 1 dm de rayon.
Quelle longueur de chaîne est déroulée en fonction de l'angle en degrés dont a tourné le treuil ?
Cette longueur est la mesure en radians de cet angle.



PROBLEME 5 La marée *Décomposition pour une fonction associée au sinus*

La formule sera de la forme $a \sin[k\,(t - t_0)/p] + b$ avec $k = 360°$ pour la fonction sin en degrés.
Pense à vérifier que $f\,(4,7) = 2,96$ et $f\,(10,1) = 10,96$.

Voici une **schématisation** où apparaissent les **opérateurs** :

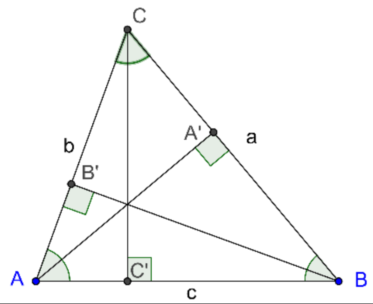
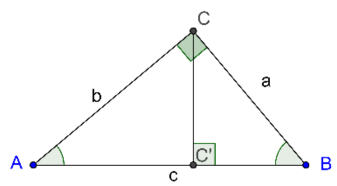
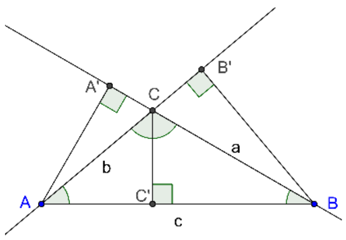
Valeur initiale	Décalage de la variable	Changement d'unité	Fonction de référence	Dilatation verticale	Positionnement vertical

$$t \xmapsto{-\,t_0} x \xmapsto{\times k/p} u \xmapsto{\sin} v \xmapsto{\times\, a} w \xmapsto{+\,b} y$$

p est la période de la fonction étudiée ; c'est par exemple l'écart entre deux antécédents successifs du maximum. Et k permet d'adapter cette période à celle du sinus donc $k = 360$ si le sinus est compté en degrés et $k = 2\,\pi$ s'il est compté en radians.
b est la moyenne entre le minimum et le maximum.
t_0 est un antécédent de b dans un intervalle où la fonction est croissante.
a est la moitié de l'écart entre le minimum et le maximum.
Remarque : les fonctions associées au cosinus sont aussi associées au sinus avec :
$\cos(x°) = \sin(x° + 90°) = \sin(90° - x°)$ ou $\cos(x) = \sin(x + \pi/2) = \sin(\pi/2 - x)$ en radians.

PROBLEME 6 Sinus pour tous les triangles *Indications*

Il s'agit de démontrer dans chaque cas que : $\dfrac{a}{\sin(\hat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\hat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\hat{C})}$.

a) Calcule les longueurs AA', BB' et CC' de deux façons en utilisant les sinus des angles en A, B et C.	**b)** Calcule c de deux façons en utilisant les sinus des angles en A et B, et considère que sin(90°) = 1.	**c)** Calcule les longueurs AA', BB' et CC' de deux façons en utilisant les sinus et considère que : $\sin(\widehat{A'CA}) = \sin(\hat{C}) = \sin(\widehat{BCB'})$.
		

PROBLEME 7 Triangles à déterminer *Indications*

La somme des angles du triangle est de180°, ce qui permet de calculer la mesure du troisième angle.

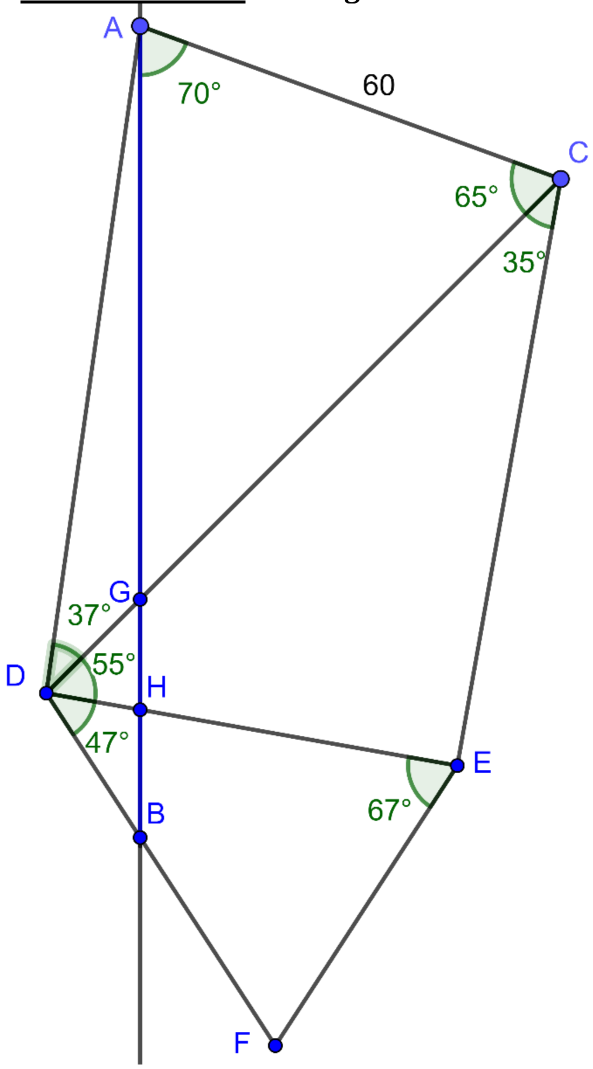
PROBLEME 8 Le partage de la tarte *Indications*

Le diamètre est le double du rayon donc la circonférence (le tour) de la tarte est de 30 π, en divisant par 7 on trouve la longueur du tour qui correspond à chacun. Ce problème montre qu'un angle peut être mesuré par la longueur de l'arc ce qui sera développé au problème suivant. En pratique l'utilisation du mètre ruban n'est pas très facile.
Avec une règle, il faut déterminer la longueur de la corde AB.
L'angle α mesure 360°/7 et le demi-angle 360°/14 ou 180°/7.
La longueur IA peut être déterminée avec le sinus du demi-angle α.
Pour utiliser le théorème des sinus, on calcule d'abord la mesure de l'angle β qui est le même en A et B parce que le triangle ABO est isocèle en O.

PROBLEME 9 Le treuil page 97 *Indications*

La longueur de la chaîne déroulée est proportionnelle à l'angle α en degrés, et pour 360°, on obtient la circonférence du treuil soit 2 π.

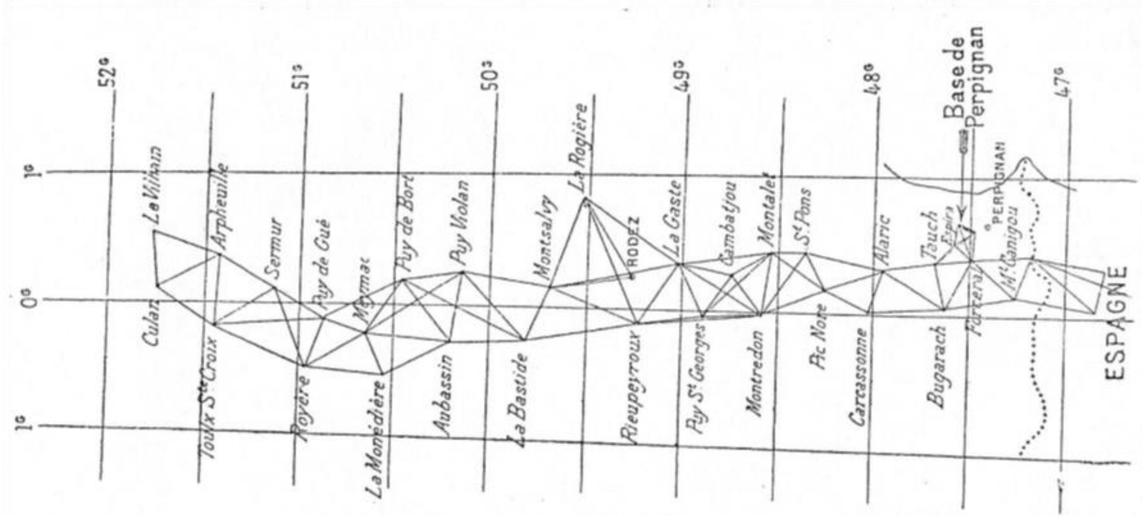
<u>Problème N°10</u> La longueur AB



Voici un problème imaginé à partir de la situation où les savants ont cherché à mesurer le méridien.
Il s'agit simplement de calculer la longueur AB à partir des informations fournies sur la figure ci-contre.
Il n'est pas nécessaire de calculer les longueurs de tous les segments représentés, cependant il faudra calculer la valeur de plusieurs angles.

Pour une meilleure précision, il faut garder les valeurs exactes jusqu'au dernier calcul et éventuellement mettre les valeurs approchées très précises de la calculatrice en mémoire.

Voici un graphique réalisé pour la détermination de la longueur du méridien.



RÉPONSES

Problème 1 L'inclinaison des rayons pour le chocolat page 93

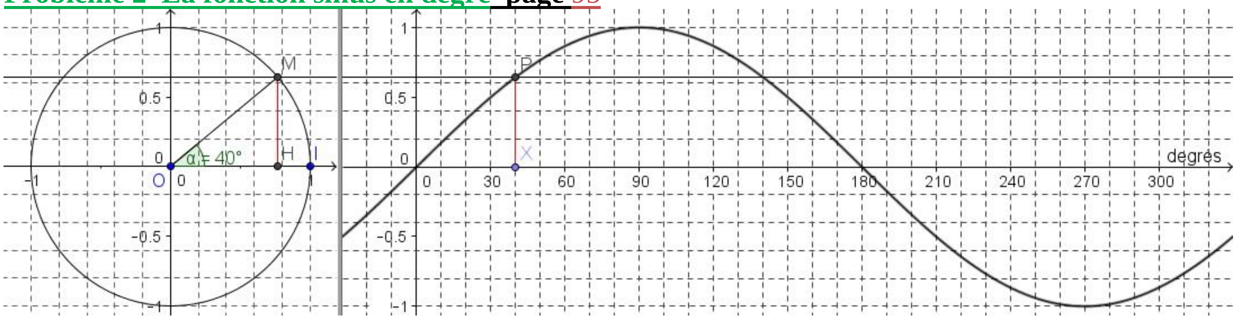
La relation entre r, s et l'angle α en degrés est : $r = s / \sin(\alpha°)$ où s = OA.

Pour tracer l'ellipse correspondant à 30°, on trace le cercle de centre l'origine du repère O de rayon r, puis on dilate chaque segment horizontal de l'axe vertical à un point du cercle en le multipliant par 2. Ce qui donne la figure du bas de la deuxième page.

Pour un autre angle, le rapport de dilatation est $1/\sin(\alpha°)$ avec $0 < \sin(\alpha°) \leq 1$ donc $1/\sin(\alpha°) \geq 1$. L'ellipse obtenue est toujours au moins aussi grande que le cercle. Pour 30°, l'aire intérieure est double de celle du disque, et pour un autre angle α, elle est multipliée par $1/\sin(\alpha°)$.

Dans le cas d'un angle de 30°, chaque point reçoit une énergie divisée par 2, et pour un autre angle α, l'énergie est multipliée par $\sin(\alpha°)$ avec $0 < \sin(\alpha°) \leq 1$ donc elle diminue lorsque le rayon s'éloigne de la perpendiculaire au sol.

Problème 2 La fonction sinus en degré page 95

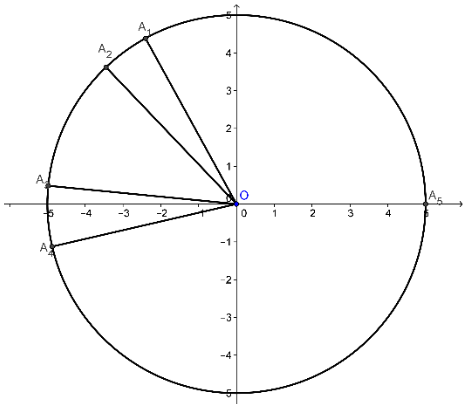


Problème 3 Diagramme circulaire page 95

Type de distribution	Distribution spécialisée bio	Artisans commerçants	Vente directe	Restauration	Grandes et moyennes surfaces	Total
Chiffre d'affaires bio	3,2	0,4	1,1	0,5	4,5	9,7
Pourcentage	33 %	4 %	11 %	5 %	47 %	100 %
Angle	119°	15°	41°	18°	167°	360°
Angle cumulé	119°	134°	174°	193°	360°	
5 cos(α)	– 2,42	– 3,48	– 4,97	– 4,87	5	
5 sin(α)	4,37	3,60	0,52	– 1,12	0	

Diagramme à l'échelle ½.

Il reste à colorier les secteurs et ajouter le titre et la légende.



Problème 4 La sinusoïde du LA page 96

a) $10 \sin(360° \times 440\, t)$ **b)** $5 \sin(360° \times 880\, t)$ **c)** $a \sin(360° \times f\, t)$

Problème 5 La marée page 96

La formule sera $a \sin[k\,(t - t_0)/p] + b$ avec $k = 360°$ et $a = 4$, $b = 6{,}96$, $t_0 = 7{,}4$ et $p = 10{,}8$ soit :
$f\,(t) = 4 \sin[360°\,(t - 7{,}4)/10{,}8] + 6{,}96$.

Problème 6 Sinus pour tous les triangles page 97

a) $\sin(\hat{A}) = \frac{BB'}{c} = \frac{CC'}{b}$, $\sin(\hat{B}) = \frac{AA'}{c} = \frac{CC'}{a}$ et $\sin(\hat{C}) = \frac{AA'}{b} = \frac{BB'}{a}$ donc :

AA' = c sin($\hat{B}$) = b sin($\hat{C}$) ; BB' = c sin($\hat{A}$) = a sin($\hat{C}$) ; CC' = b sin($\hat{A}$) = a sin($\hat{B}$) et ainsi :

$\frac{c}{\sin(\hat{C})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})}$ $\qquad \frac{c}{\sin(\hat{C})} = \frac{a}{\sin(\hat{A})}$ $\qquad \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{a}{\sin(\hat{A})}$

Ce qui établit que : $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$.

b) $\sin(\hat{A}) = \frac{a}{c} = \frac{CC'}{b}$, $\sin(\hat{B}) = \frac{b}{c} = \frac{CC'}{a}$ et $\sin(\hat{C}) = 1$

donc $c = \frac{a}{\sin(\hat{A})}$; $c = \frac{b}{\sin(\hat{B})}$ ainsi $c = \frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})}$ donc $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$.

c) $\sin(\hat{A}) = \frac{BB'}{c} = \frac{CC'}{b}$, $\sin(\hat{B}) = \frac{AA'}{c} = \frac{CC'}{a}$ et $\sin(\widehat{A'CA}) = \frac{AA'}{b} = \sin(\hat{C}) = \sin(\widehat{BCB'}) = \frac{BB'}{a}$

donc : AA' = c sin($\hat{B}$) = b sin($\hat{C}$) ; BB' = c sin($\hat{A}$) = a sin($\hat{C}$) ; CC' = b sin($\hat{A}$) = a sin($\hat{B}$)

et ainsi : $\frac{c}{\sin(\hat{C})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})}$ $\qquad \frac{c}{\sin(\hat{C})} = \frac{a}{\sin(\hat{A})}$ $\qquad \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{a}{\sin(\hat{A})}$

Ce qui établit que : $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$.

Problème 7 Triangles à déterminer page 97

a) $\hat{C}$ = 180°-(70° + 50°) = 60° et $\frac{BC}{\sin(70°)} = \frac{8}{\sin(60°)} = \frac{AC}{\sin(50°)}$ donc BC = $8\frac{\sin(70°)}{\sin(60°)} \approx 8{,}681$ et

AC = $8\frac{\sin(50°)}{\sin(60°)} \approx 7{,}076$

b) $\hat{C}$ = 120° et $\frac{BC}{\sin(20°)} = \frac{10}{\sin(120°)} = \frac{AC}{\sin(40°)}$ donc BC = $10\frac{\sin(20°)}{\sin(120°)} \approx 3{,}949$ et

AC = $10\frac{\sin(40°)}{\sin(120°)} \approx 7{,}422$

c) $\hat{C}$ = 110° et $\frac{BC}{\sin(35°)} = \frac{77}{\sin(110°)} = \frac{AC}{\sin(35°)}$ donc BC = AC = $77\frac{\sin(35°)}{\sin(110°)} \approx 47$.

Problème 8 Le partage de la tarte page 97

Le diamètre est le double du rayon donc la circonférence (le tour) de la tarte est de 30 π, en divisant par 7 on trouve la longueur 13,5 cm environ qui correspond à chacun. Mais il faudra placer précisément le centre qui doit être à 15 cm du bord sur un diamètre qui mesure 30 cm.
Ce problème montre qu'un angle peut être mesuré par la longueur de l'arc.
En pratique l'utilisation du mètre ruban n'est pas très facile. Avec une règle, il faut déterminer la longueur de la corde AB. L'angle α mesure 360°/7 et le demi-angle 360°/14 ou 180°/7.
La longueur IA est alors R sin(180°/7) et AB = 2 R sin(180°/7) soit 30 sin(180°/7) ≈ 13 cm.

Pour utiliser le théorème des sinus, on calcule la mesure de l'angle β.
De 2 β = 180° – α, on déduit 2 β = (180°×7 – 360°) /7 puis β = 450° /7.
De $\frac{AB}{\sin(\alpha)} = \frac{OA}{\sin(\beta)}$ on déduit : $AB = R\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 15\frac{\sin(360°/7)}{\sin(450°/7)} \approx 13{,}02$ cm comme ci-dessus.

Problème 9 Le treuil page 97

Pour un angle de α°, la longueur est : $\frac{\alpha}{180} \times \pi$. C'est la mesure de cet angle en radians.
Les mesures des angles en degrés et en radians sont proportionnelles.

Problème 10 La longueur AB page 99

Dans le triangle CGA, $\widehat{CGA}$ = 180° – 65° – 70° = 45°. $\frac{AG}{\sin(65°)} = \frac{AC}{\sin(45°)}$ donc $AG = \frac{AC \times \sin(65°)}{\sin(45°)}$

$\widehat{DGA}$ = 180° – 45° = 135° et $\widehat{DAG}$ = 180° – 135° – 37° = 8° alors $\frac{DG}{\sin(8°)} = \frac{AG}{\sin(37°)}$.

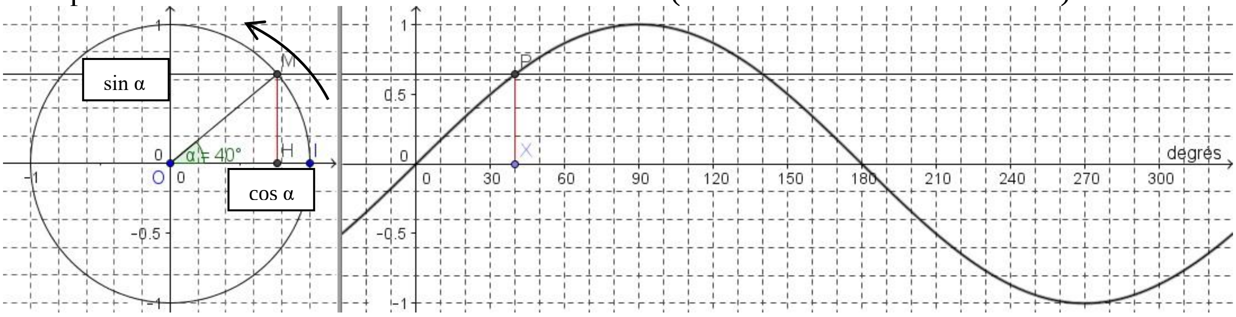
$\widehat{GDB}$ = 55° + 47° = 102° et $\widehat{DBG}$ = 180° – 102° – 45° = 33° alors $\frac{GB}{\sin(102°)} = \frac{DG}{\sin(33°)} = \frac{\sin(8°)}{\sin(33°)}\frac{AG}{\sin(37°)}$

$$AB = AG + GB = AG + \sin(102°)\frac{\sin(8°)}{\sin(33°)}\frac{AG}{\sin(37°)} = \left(1 + \frac{\sin(8°)}{\sin(33°)}\frac{\sin(102°)}{\sin(37°)}\right)\frac{60\sin(65°)}{\sin(45°)} \approx 108{,}84$$

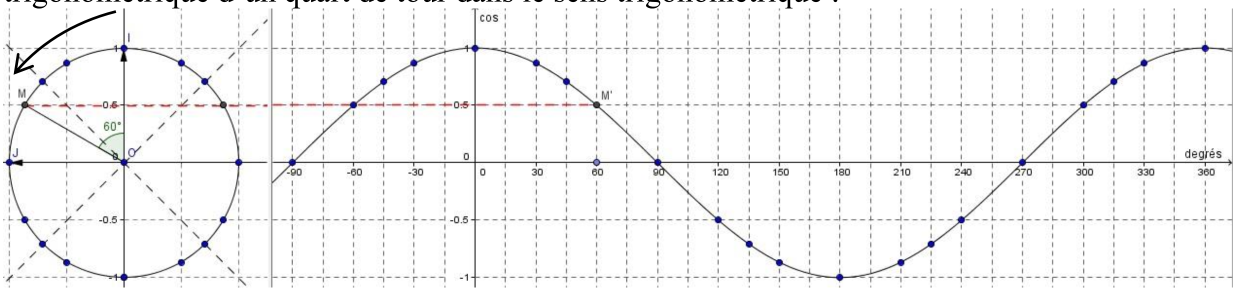
SYNTHESE : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES ET ELLIPSES

I Angles et sens trigonométrique. Fonctions sinus et cosinus

Certaines situations conduisent à définir des angles de plus de 90° et même de plus de 360°, cela suppose de donner une orientation pour les angles. Le sens trigonométrique dans le repère orthonormé (O,I,J) va de $\overrightarrow{OI}$ vers $\overrightarrow{OJ}$, c'est le sens trigonométrique et il correspond au sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, et pour chaque angle repéré par un point sur ce cercle, on peut lire le cosinus de l'angle en abscisse et le sinus en ordonnée.
Cela permet de tracer la courbe de la fonction sinus (et celle de la fonction cosinus).



Pour tracer la courbe de la fonction cosinus, il est plus pratique de tourner le cercle trigonométrique d'un quart de tour dans le sens trigonométrique :



On a indiqué ci-dessus la construction pour 60° et les points remarquables sur le cercle trigonométrique et sur la courbe.
En Mathématiques et en Sciences, les angles sont souvent exprimés en radians.
La mesure en radians d'un angle est la longueur de l'arc de cercle de rayon 1 qu'il intercepte, le sommet de l'angle étant placé au centre du cercle.
La mesure d'un angle de α° en radians est : $\frac{\alpha°}{180°} \times \pi$.

II Loi des sinus d'un triangle

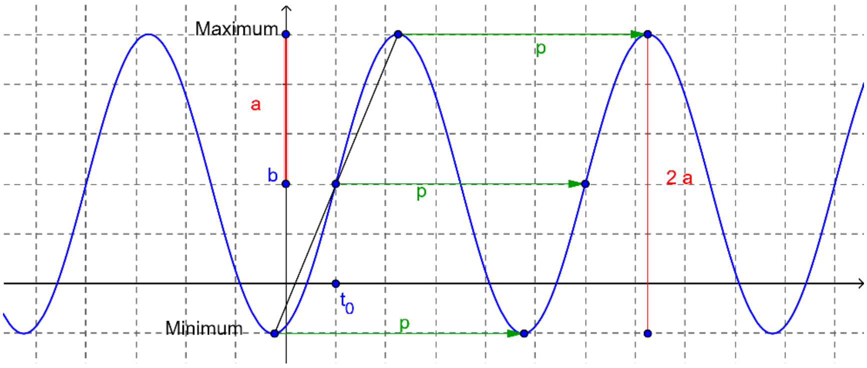
Dans tout triangle ABC non aplati : $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$ où a = BC, b = AC et c = AB.

III Sinusoïdes

On appelle sinusoïde la courbe d'une fonction associée à la fonction sinus, c'est-à-dire dont la formule est de la forme $a \sin[k(t - t_0)/p] + b$. Dans cette formule :

l'amplitude a est la moitié de la différence entre le minimum et le maximum,
b est la moyenne du minimum et du maximum,
t_0 est un antécédent de la valeur b dans un intervalle où la fonction est croissante,
la période p de la fonction est définie par : pour tout réel t, $f(t - p) = f(t) = f(t + p)$,
k vaut 360° si la fonction sin est calculée en degrés et 2π si elle est calculée en radians.

La valeur t_0 est aussi la moyenne des antécédents du minimum et du maximum suivant.
La période p peut être déterminée comme la différence entre deux antécédents successifs du maximum, ou deux antécédents successifs du minimum ou deux valeurs successives de t_0.



Si la fonction f est définie par $f(x) = r(k\,x)$ alors la courbe de f est obtenue à partir de celle de r par une contraction horizontale d'un facteur k, ou par une dilation horizontale d'un facteur $1/k$, à partir de l'axe des ordonnées.

IV Aires et ellipses

On obtient une ellipse en dilatant un cercle de rayon r dans une direction d'un facteur k, l'aire de l'ellipse est alors multipliée par ce facteur k. Elle est donc $\pi\, r^2 \times k = \pi\, r \times k\, r = \pi\, a\, b$ si on appelle a le demi-petit axe de l'ellipse et b le demi-grand axe.

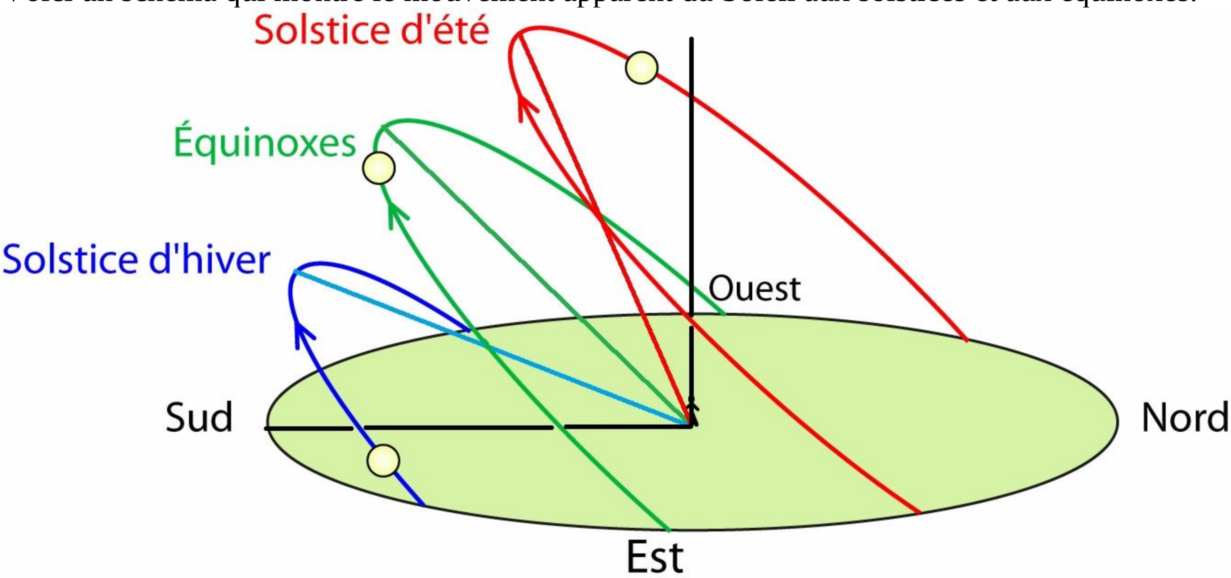
V Complément sur les saisons

La température est moins élevée en hiver qu'en été en France principalement pour deux raisons :

- La durée du jour est plus courte
- les rayons du Soleil sont plus inclinés par rapport à la perpendiculaire au sol.

Cela vient du fait de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan dans lequel la Terre tourne autour du soleil.

Voici un schéma qui montre le mouvement apparent du Soleil aux solstices et aux équinoxes.



Notez que l'inclinaison est plus forte en hiver qu'en été quand le Soleil est au plus haut.

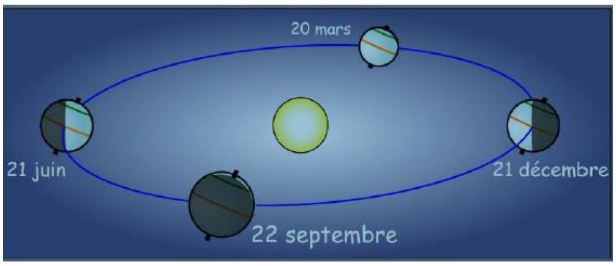


Image extrait des Cahiers Clairault 129 du CLEA.

EXPLICATIONS SUR LES METHODES

1. Utiliser un cas particulier

La réalisation d'une figure, notamment dans l'espace de dimension 3, est naturellement un cas particulier, et pour faciliter la réalisation on choisit parfois des valeurs simples pour les paramètres de la figure. Dans le premier problème, on a choisi un angle de 30° car le sin(30°) = 0,5 et 1/sin(30°) = 2. Mais il faudra imaginer l'effet d'un changement d'angle, y compris au-delà de 90°, pour trouver une formule générale.

2. Utiliser la géométrie et en particulier la trigonométrie.

Jusqu'en Seconde la trigonométrie est appliquée uniquement dans des triangles rectangles (non aplatis). Pourtant ce chapitre va utiliser le théorème des sinus dans des triangles non rectangles. C'est le passage par les hauteurs qui permet de réaliser cette généralisation. Cependant cela nécessite de redéfinir la fonction sinus pour pouvoir traiter le cas de triangles avec un angle optus (dont la mesure est strictement comprise entre 90° et 180°).

La relation $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$ montre que, dans un triangle non aplati, le quotient de la longueur d'un côté par le sinus de l'angle opposé à ce côté est une constante du triangle. En pratique, on n'a souvent besoin que de l'égalité entre deux quotients. Il est souvent nécessaire de calculer les angles en utilisant les propriétés des angles supplémentaires ou opposés ou que la somme des angles d'un triangles est 180°…

Par ailleurs la définition $\sin(\widehat{\mathrm{A}}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$ ne s'applique qu'à un triangle rectangle.

Ce chapitre conduit aussi à définir l'ellipse et à déterminer son aire, ainsi qu'à évaluer l'effet de la dilatation selon une direction. Il faudra rester prudent dans l'utilisation de ces propriétés et ne pas oublier que pour des figures semblables, multiplier les longueurs par k conduit à multiplier les aires par k^2 et les volumes par k^3.

La représentation d'objets de l'espace (3 dimensions) sur une feuille (2 dimensions) nécessiterait un travail spécifique. Et l'intersection de cylindres ou de cônes, voire de sphères, avec un plan est aussi une étude passionnante qui a une longue histoire.

3. Définir ou utiliser une fonction

Dans ce chapitre on définit les fonctions sinus et cosinus pour tous les réels, en degrés ou en radians. Lorsque tu utilises ta calculatrice, il est important de savoir si elle calcule le sinus en degrés ou en radians. Pour cela, il y a un test simple : tu calcules sin(30), si tu trouves 0,5 c'est qu'elle calcule en degrés, sinon, si elle calcule en radians, tu obtiendras – 0,988 environ. Les radians sont proportionnels aux degrés et 180° correspond à π radians.

Les sinusoïdes sont les courbes des fonctions associées à la fonction sinus, c'est-à-dire obtenues à partir de la fonction sinus en composant avec une ou plusieurs fonctions affines. Si cette composition est faite avant la fonction sinus, l'effet est celui d'un changement de variable et se lit sur l'axe des abscisses. En particulier si la fonction est définie par $f(x) = r(k\,x)$, la courbe de f sera celle de r dilatée horizontalement à partir de l'axe des ordonnées d'un rapport $1/k$.

Pour modéliser un phénomène représenté par une sinusoïde, il faut repérer les éléments caractéristiques : période, minimum, maximum, valeur moyenne et leurs antécédents. Le quotient $\frac{t-t_0}{p}$ permet d'exprimer à quelle proportion de la période correspond t en commençant à une valeur t_0 correspondant au début d'un cycle pour la fonction sinus. Lorsque $\frac{t-t_0}{p} = 1$, un nouveau cycle commence, ce qui correspond à sin(360) si la fonction est en degrés, et à sin(2 π) si elle est en radians ; c'est pourquoi la forme proposée est $\sin[k\,(t-t_0)/p]$ où k vaut soit 360 soit 2 π. Cependant, en Physique, on trouvera souvent $\sin(\omega\,t + \varphi)$, il suffit de développer $k\,(t-t_0)/p$ pour faire le lien : $k\,(t-t_0)/p = (k/p)\,t - k\,t_0/p$ donc $\omega = k/p$ et $\varphi = k\,t_0/p$.

En réalité, les phénomènes périodiques sont souvent modélisés par une somme de plusieurs fonctions associées à la fonction sinus mais les calculs sont alors plus compliqués.