

∞ Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log}(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$$

(Log désignant le logarithme népérien).

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$\text{Log}(x^2 - 1) = \text{Log}(x + 1) + \text{Log}(x - 1).$$

Même question pour l'équation

$$\text{Log}(x^2 - 1) = 2\text{Log} x + \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(x^2 - 1)}{x}$

2. Étudier les variations de f et la représenter graphiquement.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $4x - 5y = 3$.
2. Trouver le ou les nombres N s'écrivant xy en base six, les chiffres x et y vérifiant $4x - 5y = 3$.
Même question en base dix.

PROBLÈME

Partie A

Soit la loi de composition interne \star définie sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes par

$$(z; z') \longmapsto z \star z' = z\overline{z'} \quad \text{où } \overline{z'} \text{ désigne le conjugué de } z'.$$

1. Cette loi est-elle commutative? associative? Existe-t-il dans \mathbb{C} un élément neutre pour cette loi?
2. Discuter et résoudre dans \mathbb{C} , suivant les valeurs des paramètres complexes m et k , l'équation $m \star z = k$.
3. Existe-t-il z complexe tel que $z \star (z \star z) = i$?

Partie B

Dans la suite du problème, à chaque nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x; y)$ dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On désigne par P^* le plan P privé de l'origine O .

Pour chaque nombre réel non nul k , on définit l'application T_k de P^* dans lui-même, qui au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z \star z' = k.$$

1. Calculer les coordonnées de M' en fonction de celles de M . Que peut-on en déduire pour les points O , M et M' ?
2. Quelle est la nature de l'application composée $T_m \circ T_k$ où k et m sont réels non nuls? Pour quelles valeurs de k , T_k est-elle involutive?

Partie C

1. Soient (C) le cercle de centre O et de rayon 1; (C') le cercle de rayon 2 et de centre A d'affixe $1 + 2i$; (D) la droite d'équation $y = x$, privée du point O ; (D') la droite d'équation $y - 2x + 1 = 0$. Trouver les transformés de (C) , (C') , (D) et (D') par T_1 .

On tracera sur un même dessin (C) , (C') , (D) et (D') et leurs transformés.

2. Soit T' la transformation ponctuelle qui, au point M d'affixe z associe, lorsque cela est possible, le point M'' d'affixe

$$z'' = \frac{1}{2iz - 1}.$$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de $T_1 \circ T'$.

Partie D

On note \mathbb{R}^* l'ensemble des nombres réels non nuls. Pour chaque couple $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^{*2}$, on définit une transformation ponctuelle de P^* par :

$$\begin{aligned} t_{(\alpha, \beta)} : P^* &\rightarrow P^* \\ M(x; y) &\longmapsto N(\alpha x; \beta y) \end{aligned}$$

1. Reconnaître et donner la nature des applications :

$$t_{(1, 1)}, \quad t_{(-1, 1)}, \quad t_{(1, -1)} \quad \text{et} \quad t_{(-1, -1)}$$

2. Soit $\mathcal{T} = \{t_{(\alpha, \beta)}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}\}$.

Étudier la structure de \mathcal{T} muni de la loi de composition habituelle des applications.

3. Soit $t = [T_1 \circ t_{(2, 1)}]^{-1}$, application réciproque de $T_1 \circ t_{(2, 1)}$.

Exprimer t en fonction de T_1 et d'un élément de \mathcal{T} . Quelle est l'image (E) par t de la droite (Δ) d'équation $4x + 2y - 1 = 0$.

Construire (E) et en donner les éléments géométriques.