

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Clermont juin 1969 ∞

EXERCICE 1

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{6x^2 - 4x + 5}{(2x - 3)(x + 1)}$$

1. Montrer qu'il existe trois nombres réels,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , tels que

$$\frac{6x^2 - 4x + 5}{(2x - 3)(x + 1)} = A + \frac{B}{2x - 3} + \frac{C}{x + 1}$$

pour tout  $x$  réel différent de  $-1$  et de  $\frac{3}{2}$ .

2. Calculer la dérivée des fonctions  $\text{Log}(x + 1)$  et  $\text{Log}(2x - 3)$ , où  $\text{Log}$  désigne le logarithme népérien.
3. En déduire

$$\int_2^3 f(x) dx.$$

(La mise du résultat sous forme décimale n'est pas demandée.)

EXERCICE 2

Résoudre

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x > \sqrt{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormé  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ , de vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . On donne deux points fixes :  $A$ , de coordonnées  $(a; 0)$ ,  $a \neq 0$ , et  $B$ , de coordonnées  $(a; b)$ .

Soit  $I$  le milieu de  $OA$ ,  $(\Delta)$  la droite d'équation  $x = \frac{a}{2}$  et  $(D)$  la droite d'équation  $x = a$ .

On considère l'ensemble  $(E)$  des points du plan non situés sur  $(\Delta)$ . Soit  $T$  la transformation qui, au point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ , associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  défini par les relations

$$\begin{cases} x' = \frac{ax}{2x - a} \\ y' = \frac{ay}{2x - a} \end{cases}$$

1. Démontrer que  $T$  réalise une application bijective et involutive de (E) sur lui-même. Rechercher les points invariants.
2. Démontrer que les points  $O$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés. En supposant  $M$  non situé sur  $(D)$ , démontrer que le coefficient directeur de la droite  $OB$  est la demi-somme des coefficients directeurs des droites  $BM$  et  $BM'$ . En déduire une construction simple de  $M'$ , connaissant  $M$ .
3. Soit  $P$  le point d'intersection de  $MM'$  et  $(D)$ .  
Déterminer le birapport des quatre points  $M, M', O$  et  $P$ .  
Quel est l'ensemble des points  $M$  pour lesquels l'angle  $MBM'$  est droit?
4.
  - a. Démontrer que la figure transformée par  $T$  du cercle  $(C_1)$  de diamètre  $OA$  est une hyperbole, dont on déterminera le centre, les sommets, les asymptotes et l'excentricité.
  - b. Quelle est la figure transformée du cercle  $(C_2)$  de diamètre  $IA$ ?
  - c. Démontrer que les figures transformées des cercles  $(C)$  centrés sur  $x'Ox$  sont des coniques. [On désignera par  $d$  l'abscisse du centre et par  $R$  le rayon du cercle  $(C)$ ].
  - d. Démontrer que l'ensemble des cercles centrés sur  $x'Ox$  dont les transformées sont des paraboles est un faisceau de cercles tangents en  $I$ .  
Déterminer ceux des cercles de ce faisceau dont les transformées sont des paraboles de directrice  $y'y$ .  
Démontrer que ces cercles sont vus de  $O$  sous un angle droit.