

∞ **Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1972** ∞

EXERCICE 1

On considère la fonction réelle g , de la variable réelle x , définie sur $]0; 1]$, par

$$\begin{cases} g(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{Log } x, & \text{si } x \in]0; 1], \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur $]0; 1]$. (On rappelle que $2\text{Log } \sqrt{x} = \text{Log } x$ pour $x > 0$.)
2. Étudier le sens de variations de g et tracer la courbe représentative en repère ortho-normé.

On précisera les demi-tangentes éventuelles aux points d'abscisses 0 et 1.

On donne les valeurs approchées suivantes :

$$0,36 < e^{-1} < 0,37 \quad \text{et} \quad 0,51 < e^{-3} < 0,52.$$

EXERCICE 2

Un nombre de quatre chiffres s'écrit

$$N = \overline{x43y},$$

dans le système de numération dont la base est 7. Déterminer x et y de manière que ce nombre N soit divisible par 6.

PROBLÈME

Partie A

On considère la suite réelle définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$$

pour tout entier naturel n .

1. Montrer, par récurrence, qu'elle est à termes strictement positifs.
2. On pose

$$w_n = \frac{-1 + u_n}{1 + u_n}, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Trouver une relation entre w_{n+1} et w_n . En déduire la limite de w_n quand n tend vers $+\infty$, puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B

Au nombre complexe quelconque $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), on associe le point m de coordonnées $(x ; y)$ dans un plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On désigne par T' l'application de $(P) - \{O\}$ dans (P) qui au point m , associé à $z = x + iy$, fait correspondre le point M associé à

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

1. Montrer que T est surjective, mais non injective.
2. Montrer que si M' est le point associé à $\frac{1}{z}$, M est le milieu du segment $[mM']$.
3. Quels sont les points invariants par T ?
4. Trouver l'ensemble des points M :
 - a. Lorsque m se déplace sur le cercle centré en O et dont le rayon est R .
On étudiera avec soin le cas particulier du cercle dont le rayon est 1 et dont le centre est O .
 - b. Lorsque m se déplace sur une droite (D) passant par O et privée de O .
On étudiera avec soin les cas particuliers dans lesquels la droite (D) est l'axe $x'Ox$, puis l'axe $y'Oy$.