Durée : 4 heures

Baccalauréat C Clermont septembre 1975

EXERCICE 1

On lance simultanément deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On convient d'ajouter les nombres de points obtenus lorsque l'un est pair et l'autre impair, d'en faire la différence arithmétique lorsqu'ils sont tous les deux impairs et le produit lorsqu'ils sont tous les deux pairs. On désigne par X la variable aléatoire ainsi définie.

1. Déterminer les valeurs prises par X et la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer la courbe représentative de cette fonction.

EXERCICE 2

Log x désigne le logarithme népérien de x, et la base des logarithmes népériens est notée e.
On note F la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$F(x) = \text{Log}\,(\text{Log}\,x)$$

1. Déterminer la fonction dérivée F' et construire la représentation graphique de cette fonction dérivée F' dans un repère orthonormé ; (on prendra pour unité le centimètre sur les deux axes).
2. Trouver l'aire de la portion de plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = \sqrt{\text{e}}$ et $x = 2\text{e}$. (On prendra pour unité d'aire le centimètre carré).

PROBLÈME

On désigne par $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
À tout point M de ce plan, de coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, que l'on appelle affixe du point M.
On désigne par $\mathcal{P}'$ le plan $\mathcal{P}$ privé du point ω d'affixe i, et par $\mathbb{C}'$ l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, privé du nombre complexe i.
Pour tout nombre réel non nul m, on désigne par f_m l'application qui à tout point M de $\mathcal{P}'$, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' - \text{i} = \frac{m}{\overline{z} + \text{i}}$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).

1. On suppose m donné ($m \neq 0$).
   a. Montrer que f_m est une application involutive de $\mathcal{P}'$ sur $\mathcal{P}'$.
   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_m.

c. Démontrer que, quel que soit le point M de $\mathscr{P}'$, les points ω, M et M' sont alignés et que $\overrightarrow{\omega M} \cdot \overrightarrow{\omega M'} = m$.

2. Soit m et λ deux nombres réels non nuls. Pour tout point M de $\mathscr{P}'$, on désigne par M' le point f_m(M) et par M'' le point $f_\lambda\left(M'\right)$.

Démontrer que M'' est l'image de M par une transformation affine du plan $\mathscr{P}$, que l'on précisera. Quelle est la nature de cette transformation T ?

3. Le nombre m est toujours supposé fixé.

Soit A, B, C, D quatre points distincts de $\mathscr{P}'$, d'affixes respectives a, b, c, d. On appelle birapport de ces quatre points (noté (A, B, C, D)) le nombre complexe :

$$\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

Quelle est la nature de la transformation T ? En donner les éléments caractéristiques.

a. Démontrer que (A, B, C, D) = (C, D, A, B).

b. Démontrer que (A, B, C, D) est un nombre réel si et seulement si les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques.

c. On désigne par A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ les images respectives des points A, B, C, D par l'application f_m. Démontrer que (A, B, C, D) et (A$'$, B$'$, C$'$, D$'$) sont deux nombres complexes conjugués.

4. Déduire de la question précédente que, quels que soient les points M et N appartenant à $\mathscr{P}'$, les points M, N, M', N' sont alignés ou cocycliques.

(M' et N' sont les images respectives des points M et N par l'application f_m).

5. On désigne par $\mathscr{T}$ une droite ou un cercle du plan $\mathscr{P}$ et par $\mathscr{T}_1$ son intersection avec $\mathscr{P}'$.

Démontrer que l'image de $\mathscr{T}_1$ par f_m est l'intersection d'une droite ou d'un cercle avec $\mathscr{P}'$.