∽ Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Dans le plan complexe, soit m le point d'affixe z et m' le point d'affixe z', tels que

$$z + z' = 4.$$

Montrer que m' est l'image de m par la symétrie, $\mathscr{S}$, de centre I et d'affixe 2.
Soit $\mathscr{R}$ la rotation de centre O, d'affixe 0 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Montrer que $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ est une rotation, dont on précisera le centre en en donnant l'affixe et l'angle.

EXERCICE 2

On considère le mouvement rectiligne défini par

$$x(t) = \cos 3t + \sqrt{3} \sin 3t.$$

1. Montrer que l'on peut écrire $x(t)$ sous la forme $a\cos(\omega t + \varphi)$, où a, ω et φ sont des nombres indépendants de t. Déterminer a, ω et φ ; on prendra φ tel que

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

2. Déterminer la période du mouvement. Préciser, à l'intérieur d'une période, les instants et les abscisses où la vitesse diminue, les instants et les abscisses où elle augmente.

PROBLÈME

Soit f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f_a(x) = \frac{x^2 \cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1},$$

où a est un paramètre réel tel que $0 < a < \pi$.

1. Étudier la fonction $f_{\frac{\pi}{3}}$.

Tracer la courbe représentative $\left(C_{\frac{\pi}{3}}\right)$ de cette fonction dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ et tel que $\left\|\overrightarrow{\jmath}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{\imath}\right\|$ (on pourra prendre $\overrightarrow{\imath}$ de longueur 1 cm).

2. Montrer que, quel que soit a et quel que soit x, on a les inégalités

$$f_a(x) + 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -f_a(x) + 1 \geqslant 0.$$

En déduire que, quel que soit a, les valeurs de la fonction f_a sont comprises entre -1 et $+1$.

Ces valeurs extrêmes sont-elles atteintes ? Si oui, pour quelles valeurs de x ? Que peut-on en conclure, concernant l'intersection des courbes (C_a) ?

3. Étudier la fonction f_a En donner le tableau des variations. On ne demande pas d'en construire la courbe représentative (C_a). On pourra, en quelques mots, comparer son allure à celle de la courbe $\left(C_{\frac{\pi}{3}}\right)$.
4. **a.** On désigne par (D_a) la tangente à (C_a) en son point d'intersection B_a avec Oy.

   Montrer que (D_a) rencontre (C_a) en un point M_a distinct du point B_a. Déterminer, en fonction de a, les coordonnées du point M_a.

   Déterminer l'ensemble parcouru par le point M_a, lorsque a varie sur l'intervalle $]0~;~\pi[$, et en dessiner la représentation dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du 1.?

   b. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels il passe une seule droite (D_a)

   En dessiner la représentation dans un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{I},~\vec{J}\right)$.