

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Clermont-Ferrand¹ ∞

EXERCICE 1

On désigne par \mathcal{C} l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur \mathbb{R} . On rappelle que \mathcal{C} , muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} ; on le notera $(\mathcal{C}, +, \cdot)$.

1. Soit f un élément de \mathcal{C} ; on considère l'application, notée φ ,

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

Montrer que φ est dérivable et continue sur \mathbb{R} . L'application φ a-t-elle une dérivée seconde pour $x = 0$?

2. On considère l'application, notée θ ,

$$\begin{aligned} \theta: \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ f &\mapsto \varphi \end{aligned}$$

Montrer que θ est une application linéaire de $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ dans lui-même.
Déterminer le noyau de θ .

3. Dans le cas où :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2^{-x} \end{aligned}$$

déterminer l'application φ .

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien P , on considère le triangle équilatéral ABC tel que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = a;$$

a étant un nombre réel strictement positif.

1. Déterminer le point G , barycentre des points A , B et C respectivement affectés des coefficients 2, 1 et 1.

Préciser sur une figure la position du point G .

2. On considère l'application f de P dans P qui, au point M , associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Préciser la nature de l'application f et les éléments qui la caractérisent.

1. Grenoble

3. Déterminer l'ensemble Γ des points M de P vérifiant :

$$2\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2a^2$$

(On pourra remarquer que A est un élément de Γ).

4. Déterminer l'ensemble Δ des points M de P vérifiant :

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MA}^2 = 2a^2.$$

(On pourra remarquer que A est un élément de Δ).

PROBLÈME

Les parties A, B et C du problème sont dans une large mesure indépendantes.

Dans tout le problème, on désignera par P le plan affine euclidien rapporté au repère ortho-normé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

Soit a un nombre réel quelconque et f_a la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f_a(x) = e^{a(x-2)} + 1.$$

On désignera par C_a sa courbe représentative relativement au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Étudier, en discutant suivant les valeurs de a , les variations de la fonction f_a (dresser les tableaux de variations).
Montrer que les courbes C_a ont en commun un point A et une asymptote Δ .
Tracer sur une même figure les courbes C_1 et C_{-1} représentatives des fonctions f_1 et f_{-1} .
2. Préciser dans chacun des deux cas suivants la relation que doivent vérifier les nombres a et a' pour que les courbes C_a et $C_{a'}$:
— aient au point A des tangentes orthogonales,
— soient symétriques par rapport à la droite d'équation $x - 2 = 0$.
3. Soit λ un nombre réel positif. Calculer en fonction de λ l'aire du domaine plan défini par :

$$\begin{cases} 2 - \lambda \leq x \leq 2 + \lambda \\ 1 \leq y \leq \inf \{f^{-1}(x), f_1(x)\} \end{cases}$$

où $\inf \{f^{-1}(x), f_1(x)\}$ désigne le plus petit des deux nombres $f^{-1}(x)$ et $f_1(x)$.

Cette aire a-t-elle une limite lorsque λ tend vers $+\infty$?

Partie B

On envisage l'application ponctuelle de P dans P qui, à tout point m de coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ fait correspondre le point $M(X; Y)$ défini par les relations :

$$(1) \quad \begin{cases} X &= x+2 \\ Y &= e^y+1 \end{cases}$$

1. Cette application est-elle injective?

Quel est l'ensemble image de P par cette application, ensemble que l'on notera P_1 ?

Montrer que l'application g de P dans P_1 définie par les relations (1) est une bijection; donner l'expression analytique de l'application réciproque g^{-1} .

2. Quelle est l'image par g de la droite (O, \vec{u}) ?

Quelle est l'image D_a par g^{-1} de la courbe C_a ?

Tracer D_1 et D_{-1} dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3. Soit H la courbe d'équation : $y = 2 + \sqrt{x}$.

On désigne par Γ l'image de H par g^{-1} . Quelle est l'équation de Γ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$? Tracer la courbe Γ en précisant ses particularités.

Partie C

-

Soit \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes, où \bar{z} désigne le conjugué de z . On définit la suite (z_n) de \mathbb{N} dans \mathbb{C} par :

$$\begin{cases} z_0 &= k(1+i) \\ z_n &= \left(-\frac{1}{2}\right) \overline{z_{n-1}} \end{cases} \quad (k \text{ nombre réel non nul})$$

Soit m_n le point du plan P d'affixe z_n relativement au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer z_n en fonction de z_0 et de n .

Quelle est la limite du module de z_n quand n tend vers $+\infty$?

2. Exprimer les coordonnées $(x_n; y_n)$ du point m_n en fonction de k et de n .

Montrer que tous les points m_n appartiennent à la réunion de deux droites fixes que l'on précisera.

Dans quelle application indépendante de n le point m_{n+1} est-il l'image de m_{n-1} ? Le point m_n a-t-il une position limite quand n tend vers $+\infty$?

3. On pose $M_n = g(m_n)$.

4. Exprimer les coordonnées $(X_n; Y_n)$ de M_n en fonction de k et de n .

5. Montrer que tous les points M_n appartiennent à la réunion de deux courbes fixes que l'on précisera.