Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Les fonctions réelles f et g sont définies par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

Étudier les ensembles de définition des fonctions dérivées premières de f et de g, puis calculer la dérivée première, pour la valeur x de la variable, de chacune des fonctions f et g.
Calculer, à l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\,\mathrm{d}x.$$

Étudier la limite, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, de

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^3}} + \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]^3}} + \ldots + \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]^3}}\right]$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un plan affine euclidien P étant rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, on associe au point M de P dont les cordonées sont x_M et y_M le nombre complexe

$$z_M = x_M + \mathrm{i}y_M \quad (\mathrm{i}^2 = -1), \text{ affixe de } M.$$

Les réels α, β, γ étant strictement positifs, les points A, B, C ont respectivement pour affixes

$$z = \alpha, \quad z_{\text{B}} = \beta, \quad z_{\text{C}} = \mathrm{i}\gamma.$$

On construit dans P les triangles équilatéraux CBA$'$, ACB$'$ et BAC$'$ de manière que ces triangles soient extérieurs au triangle ABC.

1. Calculer les affixes des points A$'$, B$'$ et C$'$ en fonction de α, β, γ et de $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Démontrer que les nombres complexes $z_{\text{A}'} - z_{\text{A}}$, $z_{\text{B}'} - z_{\text{B}}$, et $z_{\text{C}'} - z_{\text{C}}$ ont le même module.
2. On suppose que $\alpha = -1$, $\beta = +1$, $\gamma = \sqrt{3}$.
   Déterminer les nombres complexes a, b et c de manière que l'équation $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ ait pour solutions $z_{\text{A}'}$, $z_{\text{B}'}$, $z_{\text{C}'}$.

PROBLÈME **12 POINTS**

On désigne par P un plan d'un espace affine euclidien E dont la dimension est 3.
La distance de deux points M et N de E, ou norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$, est notée $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$. À tout couple $(M\,;\,N)$ de points de E, on associe :

α. le réel $\Delta(M\,;\,N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ si les points M et N ont la même projection orthogonale m sur P,

β. le réel $\Delta(M\,;\,N) = \left\|\overrightarrow{Mm}\right\| + \left\|\overrightarrow{mn}\right\| + \left\|\overrightarrow{nN}\right\|$ si les points M et N ont, sur P, des projections orthogonales m et n distinctes.

On choisira un repère cartésien orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$ de E tel que $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ soit un repère cartésien orthonormé de P.

1. On désigne par t un réel quelconque.
Le point $M(t)$ de E est défini par l'égalité

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = (\cos t)\cdot\overrightarrow{\imath} + (\sin t)\cdot\overrightarrow{\jmath} + t\cdot\overrightarrow{k}.$$

et le point L de P est tel que

$$\overrightarrow{\text{OL}} = \overrightarrow{\imath}.$$

Démontrer que $\Delta(\text{L},\ M(t)) = |t| + \left|2\sin\dfrac{t}{2}\right|$.

2. Étudier les variations de la fonction f :

$$f:\quad \begin{array}{rcl} [-2\pi\,;\,+4\pi] & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & |t| + \left|2\sin\dfrac{t}{2}\right| \end{array}$$

Tracer la courbe représentative F de f dans un plan Γ affine euclidien, rapporté au repère cartésien orthonormé $\left(\Omega,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra le centimètre comme unité de longueur.

3. L'unité d'aire étant le centimètre carré, calculer l'aire de la partie du plan Γ limitée par F, par l'axe des abscisses et par les droites qui ont pour équations respectives $t = 4\Pi$ et $t = -2\pi$.

4. α étant un réel strictement positif donné, on désigne par A le point de E tel que

$$\overrightarrow{\text{OA}} = \alpha\,\overrightarrow{k}.$$

Quel est l'ensemble des points M du plan P tels que, ℓ étant un réel donné,

$$\Delta(\text{A}\,;\,M) = \ell\,?$$

Discuter suivant les valeurs de ℓ.
Quel est l'ensemble des points N du plan $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ tels que

$$\Delta(\text{A}\,;\,N) = \ell\,?$$

Discuter suivant les valeurs de ℓ.

5. Étant donnés les réels α, β, γ strictement positifs et tels que $\beta < \alpha$, les points A et B de E sont définies par : $\overrightarrow{\text{OA}} = \alpha\,\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\text{OB}} = \gamma\,\overrightarrow{\jmath} + \beta\,\overrightarrow{k}$.
   Quel est l'ensemble des points S de P tels que

$$\Delta(\text{A}\,;\,\text{S}) = \Delta(\text{S}\,;\,\text{B})?$$

   Discuter suivant les valeurs respectives de γ et de $\alpha - \beta$.
6. On désigne par φ une application affine de E sur E qui
   a. laisse P globalement invariant et qui
   b. est telle que, quels que soient les points M et N de E,

$$\Delta(M\,;\,N) = \Delta(\varphi(M)\,;\,\varphi(N)).$$

   Quelles sont les restrictions à P des applications affines φ?
   Prouver que, si m est la projection orthogonale de M sur P, $\varphi(m)$ est la projection orthogonale de $\varphi(M)$ sur P.
   Trouver toutes les applications affines φ de E sur E qui possèdent les propriétés **a.** et **b.**