

## ☞ Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1979 ☞

### EXERCICE 1

4 POINTS

À tout réel  $m$ , élément de  $]0; 1[$  on associe, dans un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  la conique  $(E_m)$  d'équation

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}.$$

1. Construisez la courbe  $(E_{\frac{3}{4}})$ .
2. Quelle est la nature de  $(E_m)$ ? Déterminez par leurs coordonnées dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  le centre et les sommets de  $(E_m)$ . Déterminez et tracez la courbe  $(S)$  constituant l'ensemble des sommets du grand axe de  $(E_m)$  quand  $m$  varie dans l'intervalle indiqué.
3. Déterminez par leurs coordonnées dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  les foyers de  $(E_m)$ . Déterminez et tracez la courbe  $(C)$  constituant l'ensemble de ces foyers quand  $m$  varie dans l'intervalle indiqué.

### EXERCICE 2

4 POINTS

Deux urnes A et B contiennent des boules numérotées. Dans l'urne A, il y a deux boules : une porte le numéro  $a$ , l'autre porte le numéro 1. Dans l'urne B, il y a trois boules : une porte le numéro  $b$ , les deux autres le numéro  $-1$ .  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs.

On tire au hasard (\*) une boule de l'urne A et une boule de l'urne B et on calcule la somme des numéros portés par chacune des deux boules tirées. On définit ainsi une variable aléatoire réelle  $X$ .

1. Calculez, en fonction de  $a$  et  $b$ , l'espérance mathématique de  $X$ .
2. Déterminez l'ensemble des couples  $(a, b)$  d'entiers relatifs tels que l'espérance mathématique de  $X$  soit nulle.
3. Déterminez l'ensemble des couples  $(a, b)$  d'entiers relatifs tels que les deux conditions suivantes soient simultanément remplies :
  - l'espérance mathématique de  $X$  est nulle;
  - l'écart-type de  $X$  est inférieur ou égal à 2.

(\*) cela signifie que les couples de numéros possibles sont d'égale probabilité.

### PROBLÈME

12 POINTS

N. B. – Les parties A, B et C sont indépendantes

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère cartésien du plan affine  $(P)$ . On désigne par  $f$  une application affine de  $(P)$  dans  $(P)$  telle que  $f(O) = O$  et dont l'endomorphisme  $\varphi$  associé a pour matrice  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  du plan vectoriel  $(\vec{P})$  associé à  $(P)$ .

#### Partie A

Dans cette partie, on suppose que

$$\varphi(\vec{i} + \vec{j}) = (a + b)(\vec{i} + \vec{j}) \text{ et que } b \neq 0.$$

1. Calculer  $c$  et  $d$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
2. Trouver une équation de l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tels que  $M, f(M)$  et le point  $A$  défini par  $\vec{OA} = \vec{i}$  soient alignés. Discuter la nature de cet ensemble suivant les valeurs de  $a$  et  $b$  en supposant le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.
3. Soit  $\vec{E}_k = \{ \vec{u} \in (\vec{P}) / \varphi(\vec{u}) = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \}$ .  
Calculer  $k$  pour que  $\vec{E}_k$  soit différent de  $\{ \vec{0} \}$ . Déterminer  $\vec{E}_k$  pour ces valeurs de  $k$ .
4. On pose  $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$ .  
Quelle est la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ?  
On pose  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$  et, plus généralement  $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ . Donner, en fonction de  $\alpha = a + b$  et  $\beta = a - b$  la matrice de  $\varphi^n$  dans la base  $(I, J)$  puis dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .  
En déduire les coordonnées de  $f^n(A)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  en fonction de  $a, b$  et  $n$ .

### Partie B

Dans cette partie, on suppose que  $f \circ f = f_0$  et que  $f \neq f_0$ ;  $f_0$  étant l'application affine qui à tout point de  $(P)$  fait correspondre le point  $O$ .

1. Lorsque  $b = 1$ , calculer  $c$  et  $d$  en fonction de  $a$  et démontrer que l'image de  $(P)$  par  $f$  est une droite  $(\Delta)$  passant par  $O$  telle que sa droite vectorielle associée soit le noyau de  $\varphi$  noté  $\text{Ker } \varphi$ ?
2. Dans le cas général, démontrer que  $\varphi(\vec{P})$ , image de  $\vec{P}$ , est incluse dans  $\text{Ker } \varphi$ . En déduire que  $\text{Ker } \varphi$  puis  $\varphi(\vec{P})$  sont de dimension 1. Retrouver ainsi le résultat du 1.
3. Soit  $M_0$  un point de  $(P)$  et  $(D)$  la droite de  $(P)$ , parallèle à  $(\Delta)$  passant par  $M_0$ . Montrer que, quel que soit le point  $M$  de  $(D)$ ,  $\varphi(\vec{M_0M}) = \vec{0}$ .  
En déduire l'image de  $(D)$  par  $f$ .

### Partie C

On suppose, dans cette partie que

$$f \circ f \circ f = f^3 = f_0 \quad \text{et} \quad f \circ f = f^2 \neq f_0$$

1.  $\vec{u}$  étant un vecteur de  $\vec{P}$  tel que  $\varphi^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$ , prouver qu'il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $\varphi(\vec{u}) = k\vec{u}$ .

En déduire qu'il existe deux réels  $\lambda$  et  $\lambda'$  tels que

$$\varphi^2(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}) + \lambda'\vec{u}.$$

2. Calculer  $\varphi^3(\vec{u})$  en fonction de  $\lambda, \lambda', \vec{u}$  et  $\varphi(\vec{u})$ .

Que peut-on en déduire pour  $\lambda$  et  $\lambda'$  puis pour  $\varphi^2(\vec{u})$ ?

Existe-t-il une application  $f$  telle que l'on ait à la fois  $f^3 = f_0$  et  $f^2 \neq f_0$ ?