Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Clermont-Ferrand ∽

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation

$$(1) \qquad 5x - 4y = 2.$$

2. On considère les couples $(a,\ b)$ solutions de l'équation (1).

a. Quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun de a et b?

b. Montrer qu'il existe un seul couple $(a,\ b)$ dont le plus petit multiple commun de a et b est 60 et le plus grand diviseur commun de a et b est 2.

EXERCICE 2

On considère les intégrales définies par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}\,\mathrm{d}x, \text{ où } n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,\mathrm{d}x$. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.

2. Calculer I_1. En déduire I_3 et I_5.

3. **a.** Soit f l'application qui à $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ associe

$$f(x) = \text{Log}\left[\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ par

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

b. En déduire I_0 puis I_2 et I_4.

PROBLÈME

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ et soit E l'espace vectoriel associé de base $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

Partie A

On considère l'endomorphisme φ de E défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right) \\ \varphi\left(\overrightarrow{k}\right) & = & -\overrightarrow{k}. \end{array}\right.$$

1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de E de composantes $(x,\ y,\ z)$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer les composantes $(X,\ Y,\ Z)$ de $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$ relativement à cette même base.
2. Déterminer le noyau D de φ. En donner une base.
3. Montrer que l'image de φ est le plan vectoriel P orthogonal à D.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par φ.
5. Montrer que l'endomorphisme φ peut être mis sous la forme

$$\varphi = \psi \circ p$$

où ψ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et p une projection vectorielle à déterminer.

Partie B

Soit A le point de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont $(0,\ 1,\ 1)$. Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$ associée à l'endomorphisme φ et laissant A invariant.
Au point m de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ dans $\mathcal{R}$, correspond le point $M = f(m)$ de coordonnées $(X,\ Y,\ Z)$ dans ce même repère.

1. Montrer que 1 est définie analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & \frac{1}{2}[x+y-1]\\ Y & = & \frac{1}{2}[x+y+1]\\ Z & = & -z+2 \end{array}\right.$$

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et l'image de $\mathcal{E}$ par f. Donner les équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ de ces ensembles.
3. Montrer que le repère $\mathcal{R}'\left(\text{A},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right),\ \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$ d'équation dans $\mathcal{R}$

$$x - y + 1 = 0.$$

.

4. Déterminer, dans ce repère $\mathcal{R}'$, l'expression analytique de la restriction $\hat{f}$ de f à $\mathcal{P}$. Quelle est la nature de $\hat{f}$.
5. Soit $m\mathcal{E}$ et $M = f(m)$ son transformé par f. Indiquer par quelles transformations géométriques on passe du point m au point M. (On pourra illustrer la réponse à l'aide d'une figure.)

Partie C

On considère le point mobile $m(t)$ dont les coordonnées à la date t sont définies, relativement au repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$, par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 1+\cos t\\ y(t) & = & 0 \qquad\qquad t \in [0\;;\;2\pi[\\ z(t) & = & 1+\sin t,\end{array}\right.$$

1. Quelle est la nature de la trajectoire de $m(t)$?
Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ du point $m(t)$ à la date t.
Quelle est la nature du mouvement ?

2. Soit $M(t)$ le transformé de $m(t)$ par f.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la trajectoire (Γ) de $M(t)$, relativement au repère $\mathcal{R}$. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du point $M(t)$ à la date t.

b. Étudier les variations de l'application :

$$t \in [0\;;\;2\pi[\longmapsto \left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$$

et tracer la courbe représentative.

c. Trouver les positions de $M(t)$ pour lesquelles $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$ est maximal, minimal.

3. Montrer que (Γ) est globalement invariante par f.

4. Montrer que la trajectoire (Γ) est située dans le plan $\mathcal{P}$ et trouver son équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}'$. Préciser la nature et les éléments géométriques de (Γ).