

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on donne un cercle (C) , de centre $\omega(2; 0)$ et de rayon 2, et un cercle (C') , de centre ω' situé sur $x'Ox$, tel que $\omega'\omega = 6$ et de rayon 4. Soit I le centre d'homothétie directe de ces deux cercles.

1. Calculer \overrightarrow{OI} .

Calculer la puissance de l'inversion de centre I transformant (C) en (C') .

2. Soit (Γ) le cercle de centre $\gamma(0; b)$ et de rayon $|b|$. Ce cercle coupe (C) et (C') respectivement en A et en A', distincts de l'origine. Montrer que la droite AA' passe par I.

EXERCICE 2

Exprimer la distance d'un point, de coordonnées X, Y , aux droites (D) et (D') qui, dans un repère orthonormé d'axes Ox, Oy , ont respectivement pour équation

$$x + 2y = 0 \quad \text{et} \quad -2x + y = 0.$$

Reconnaître et construire, dans ce même repère, la courbe (R) d'équation

$$(x + 2y)(-2x + y) = 5.$$

PROBLÈME

1. On considère l'équation en z , à coefficients complexes,

$$(1) \quad (16\text{tg}^2\theta)z^2 - 4(1 + 2i\text{tg}\theta)z - (\text{tg}\theta - i)^2 = 0,$$

où θ est un paramètre réel tel que

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$$

- a. Chercher les racines réelles de cette équation.
Discuter. Montrer que dans tous les cas il y en a une, et une seule, r_0 .
 - b. Chercher toutes les racines de l'équation (1). Discuter.
2. Soit $z_0 = x + iy$ la racine, lorsqu'elle existe, complexe non réelle de l'équation (1).
On lui fait correspondre, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy , son point image M , de coordonnées x et y .
Déterminer l'ensemble des points M images des nombres z_0 , pour toutes les valeurs de θ appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \right[$.
Construire avec précision cet ensemble.

3. Soit, tracée dans le repère orthonormé de la question précédente, (\mathcal{P}) la parabole de représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(\cotg^2 \theta - 1), \\ y = \frac{1}{2}\cotg \theta, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$$

Soit A le sommet de cette parabole et (D) la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

- a. Soit (Δ) une droite du plan, passant par A, et distincte de l'axe Ox et de la tangente au sommet de (\mathcal{P}). Soit m la pente de (Δ). La droite (Δ) recoupe (\mathcal{P}) en un point M , distinct de A; exprimer, en fonction de m , les coordonnées de M .
Soit (Δ') la perpendiculaire en A à la droite (Δ).
La droite (Δ') recoupe aussi (\mathcal{P}) en un point M' , distinct de A; exprimer, en fonction de m , les coordonnées de M' .
- b. Soit B la projection orthogonale de O sur (D) et H et H', respectivement, celles de M et de M' sur (D). Démontrer que le produit $\overline{BH} \cdot \overline{BH'}$ est indépendant de la position de la droite (Δ).
- c. Démontrer géométriquement que les cercles circonscrits aux triangles OHH' associés aux diverses positions de la droite (Δ) appartiennent un faisceau, dont on précisera la nature et les points remarquables. Quel est l'ensemble des centres de ces cercles?
- d. Calculer les coordonnées du point d'intersection, T, des tangentes à (\mathcal{P}) aux points M et M' .
Montrer que ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle OHH'.
- e. Retrouver ainsi que les cercles circonscrits aux triangles OHH', associés aux diverses positions de la droite (Δ), appartiennent à un même faisceau.
4. Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe I lorsque (Δ) varie.

Calculer le rapport $\frac{IM'}{IM}$ en fonction de m , puis en fonction de θ .

Pour quelles valeurs de m et de θ , ce rapport est-il égal à $\frac{1}{4}$? On calculera ces valeurs de θ à l'aide d'une table de logarithmes et l'on donnera le résultat en degrés, minutes et secondes. On construira les points M correspondants et l'on rectifiera alors, si nécessaire, le tracé de la parabole (\mathcal{P}).