

Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1977

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Dans le corps des nombres complexes, calculer les racines cubiques de l'unité,

2. On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

À chaque nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x ; y)$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On désigne par A, B, C, D les images respectives dans ce plan des nombres

$$-j, \quad \frac{2}{j^2}, \quad -\frac{2}{j^2}, \quad \frac{4}{j^4}$$

Démontrer que les quatre points A, B, C, D appartiennent à un même cercle.

(On pourra former d'abord l'équation du cercle passant par A, B, C).

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B ayant respectivement pour coordonnées $(1 ; 0)$ et $(-1 ; 0)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur \vec{j} .

Soit s la similitude directe dont le centre est B, dont l'angle est l'angle droit positif et dont le rapport est $\frac{1}{2}$.

1. Démontrer $A' = s(A)$. Montrer que l'ensemble des images M' des points M de D par s est une droite D' qui coupe D en I. Déterminer $I' = s(I)$ et comparer λ et λ' tels que $\vec{A'M'} = \lambda' \vec{A'I'}$ et $\vec{AM} = \lambda \vec{AI}$.

(Représenter graphiquement les points et les droites).

2. Soit M'' le barycentre des points M et M' respectivement affectés des coefficients 2 et -1 .

Démontrer que M'' est l'image de M dans une similitude directe s'' de centre B et que l'ensemble des points M'' images des points M de D est une droite D'' que l'on déterminera.

(Pour résoudre cette question on pourra soit utiliser les nombres complexes, soit introduire A'' barycentre des points A et A' respectivement affectés des coefficients 2 et -1 et montrer qu'il existe une similitude directe s' de centre B telle que

$$s'(A) = M, \quad s'(A') = M' \quad \text{et} \quad s'(A'') = M''$$

PROBLÈME

11 POINTS

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions numériques f d'une variable réelle, définies sur \mathbb{R} trois fois dérivables sur \mathbb{R} , et telles que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = 0.$$

- Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que la fonction qui à x associe e^{kx} soit élément de E .
- Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction numérique f d'une variable réelle soit élément de E est que la fonction g définie par

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{e^x} f(x)$$

soit trois fois dérivable sur \mathbb{R} et telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'''(x) = 0.$$

En déduire la forme générale des fonctions g , puis la forme générale des fonctions f de l'ensemble E .

Partie B

- Soit E' l'ensemble des fonctions réelles f qui, a, b et c désignant trois réels quelconques, associent au réel x le réel $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.
Soit F l'ensemble des fonctions numériques définies sur \mathbb{R} .
On sait que F muni de l'addition, et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Démontrer que E' est un sous-espace vectoriel de F , et que $\mathcal{B} = \{f_0, f_1, f_2\}$ est une base de E' , avec $f_0(x) = e^x$, $f_1(x) = xe^x$ et $f_2(x) = x^2e^x$.
- Étudier les variations de la fonction f_1 , et tracer sa représentation graphique (C_1) dans un repère orthonormé. On prend pour unité de longueur le centimètre.
Tracer, dans le même repère, la représentation graphique (C_0) de la fonction f_0 .
- Soit m un nombre réel positif. L'unité d'aire est le centimètre carré. Calculer l'aire \mathcal{A}_m de la portion de plan limitée par les courbes (C_0) , (C_1) et les droites d'équation $x = m$ et $x = 1$, c'est-à-dire déterminée par les inégalités

$$\begin{cases} m & \leq & x & \leq & 1 \\ xe^x & \leq & y & \leq & e^x \end{cases}$$

Cette aire a-t-elle une limite lorsque m tend vers $+\infty$.

- Soit D l'application qui à toute fonction f de E' fait correspondre sa fonction dérivée. Démontrer que D est un endomorphisme de E' . Déterminer les composantes de $D(f_0)$, $D(f_1)$, et $D(f_2)$ dans la base \mathcal{B} .
Démontrer que D est bijective et déterminer les composantes de $D^{-1}(f_0)$, $D^{-1}(f_1)$, et $D^{-1}(f_2)$ dans la base \mathcal{B} , D^{-1} étant l'application réciproque de D .

Partie C

Soit α un nombre réel donné. À toute fonction f de E' , on associe la fonction f_α définie sur \mathbb{R} par

$$f_\alpha(x) = f(x + \alpha)$$

1. Soit T_α l'application qui à f fait correspondre f_α . Montrer que $f_\alpha \in E'$. T_α est-il un endomorphisme de E' ?
Déterminer $T_\alpha(f_0)$, $T_\alpha(f_1)$ et $T_\alpha(f_2)$ dans la base \mathcal{B} .
2. Soit \mathcal{T} l'ensemble des applications T_α lorsque α décrit \mathbb{R} . Démontrer que \mathcal{T} muni de la loi \circ de composition des applications, est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.