∽ Concours contrôleur des douanes ∾
Branche surveillance – session 2024

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarques préliminaires :

- Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
- Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur les copies destinées à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

En 2020, M. DUFISC a fait sa première déclaration de revenus : il a déclaré un revenu annuel de 90 000 €, l'impôt correspondant s'est élevé à 8 000 € et son revenu après impôt a donc été de 82 000 €. Chacune des quatre années suivantes, son revenu annuel a augmenté de 2 % et l'impôt correspondant a augmenté de 3 %.

M. DUFISC souhaite étudier ce qu'il adviendrait de son revenu après paiement de l'impôt si l'évolution constatée se poursuivait.

Dans ce but, on suppose que l'évolution constatée se poursuit et, pour tout entier n positif ou nul, on note :

- R_n le montant exprimé en euros du revenu annuel de M. DUFISC en l'an $(2020+n)$;
- I_n le montant exprimé en euros de l'impôt correspondant ;
- $U_n = R_n - I_n$.

Ainsi $R_0 = 90000$; $I_0 = 8000$; $U_0 = 82000$.

1. **a.** Calculer R_1 ; I_1 ; U_1 ; R_2 ; I_2 ; U_2.

   b. Montrer que, pour tout entier n positif on a :
   $R_n = 90000 \times (1,02)^n$ et $I_n = 8000 \times (1,03)^n$

2. **a.** Montrer que pour tout entier n positif, $U_{n+1} - U_n = 1800 \times (1,02)^n - 240 \times (1,03)^n$.

   b. Montrer que : $U_{n+1} < U_n$ équivaut à : $n \times \ln\left(\dfrac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\dfrac{15}{2}\right)$.

On admettra que les entiers n supérieurs ou égaux à 207 vérifient $n \times \ln\left(\dfrac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\dfrac{15}{2}\right)$.

3. Si l'évolution que M. DUFISC a constatée concernant son revenu et l'impôt correspondant se poursuit, voit-il son revenu après l'impôt diminuer ?

Exercice 2

Depuis une décennie, le nombre de candidats admis au baccalauréat augmente régulièrement à Clermont-Ferrand. Les responsables du campus universitaire décident de mener une étude sur les besoins en infrastructures et équipements du campus puis une enquête auprès d'un échantillon d'étudiants sur leur préférence entre le renforcement du parc automobile et la construction de nouvelles résidences universitaires.

L'étude menée sur la période allant de 2015 à 2020 a permis de modéliser l'évolution du nombre de nouveaux étudiants demandeurs de logements dans les résidences universitaires par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 1\,000\left[\frac{1}{2}n + 1 - \ln\left(\frac{1}{2}n+1\right)\right];$$

(u_n) étant le nombre d'étudiants en $(2015+n)$.

Arthur, le premier responsable des étudiants, a pris connaissance des résultats de l'étude menée. Afin de connaître l'évolution du nombre d'étudiants demandeurs de logements dans les résidences universitaires, il se propose d'étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \ln\left(\frac{1}{2}x+1\right).$$

Il se propose également d'analyser les résultats issus de l'enquête.

Partie A

1. Déterminer le nombre de nouveaux étudiants demandeurs de logements dans les résidences en 2015 puis en 2020.

   Vous pourrez utiliser les approximations suivantes pour exprimer les résultats :

   $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}4054$; $\ln(2) \approx 0{,}6931$; $\ln\frac{5}{2} \approx 0{,}9163$; $\ln(3) \approx 1{,}0986$; $\ln\left(\frac{7}{2}\right) \approx 1{,}2528$;

   $\ln(4) \approx 1{,}3863$; $\ln\left(\frac{9}{2}\right) \approx 1{,}5041$; $\ln(5) \approx 1{,}6094$; $\ln\left(\frac{11}{2}\right) \approx 1{,}7047$; $\ln(6) \approx 1{,}7918$.
2. **a.** Calculer la dérivée de $f(x)$ pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Étudier le sens de variation de $f(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
4. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

Partie B

Un groupe de 100 étudiants composé de 60 garçons et 40 filles a participé à l'enquête sur la préférence entre le renforcement du parc automobile et la construction des résidences universitaires. 40 % des garçons sont favorables au renforcement du parc et 60 % des filles optent pour la construction des résidences universitaires.

1. Déterminer :

   a. le nombre de garçons ayant opté pour la construction de nouvelles résidences.

   b. le nombre total d'étudiants ayant opté pour la construction des nouvelles résidences.
2. On interroge un étudiant au hasard.

   Déterminer la probabilité des événements suivants :

   a. A : l'étudiant préfère la construction de nouvelles résidences.

   b. B : l'étudiant est une fille qui a opté pour le renforcement du parc automobile.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$.

On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variation complet. On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).
5. On admet que sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
6. Pour tout réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
   $g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$.

   En s'aidant du tableau de variation de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 4

On dispose d'une urne contenant 6 jetons indiscernables au toucher dont :

- trois jetons numérotés 1 ;
- deux jetons numérotés 2 ;
- un jeton numéroté 3.

et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 2, 2, 3.

L'épreuve (E) consiste à tirer au hasard et simultanément deux jetons de l'urne et à lancer une fois le dé.
On effectue une épreuve. On suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A : « le produit des trois numéros obtenus est égal à 4 » ;
   - B : « la somme des trois numéros obtenus est égale à 5 ».
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéro 2 lors d'une épreuve.
   Donner la loi de probabilité de X et en dresser le tableau.
3. Lors d'une épreuve, on appelle « succès » l'obtention de trois numéros impairs.
   Montrer que la probabilité d'avoir un succès est égale à $\dfrac{1}{5}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;\,1\}$. On répète n fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve (E). Calculer la probabilité P_n de l'événement A_n : « obtenir au moins un succès lors des n épreuves ».