# Concours général des lycées - Session 2024

## 1 Problème 1 : étude d'une suite

Pour tout réel $a \geqslant 0$, on appelle suite associée à $\alpha$ la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \alpha$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0.$$

**Partie 1 : Généralités**

1. Soit $\alpha$ un réel positif. Démontrer que la suite $(u_n)$ associée à $\alpha$ vérifie $u_n \geqslant 0$, pour tout entier $n \geqslant 0$.
2. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$. On note $(u_n)$ la suite associée à $\alpha$ et $(v_n)$ la suite associée à $\beta$.

   Démontrer que $u_n \leqslant v_n$, pour tout entier $n \geqslant 0$.
3. On note $(w_n)$ la suite associée à 0. Démontrer que $w_n \geqslant 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. Soit $\alpha$ un réel positif ou nul. On suppose que la suite $(u_n)$ associée à $\alpha$ converge vers un réel $\ell$.

   Déterminer la valeur de $\ell$.
5. Soit $\alpha$ un réel tel que $\alpha > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

   Justifier que la suite associée à $\alpha$ est strictement décroissante.

   Que peut-on en déduire en terme de convergence ?

**Partie 2 : Un cas particulier**

Dans toute cette partie, on note $(t_n)$ la suite associée à 4 et on définit la suite $(s_n)$ par

$$s_n = n(t_n - 1), \text{ pour tout entier } n \geqslant 0.$$

6. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ , l'encadrement :

$$1 + \frac{2}{n} \leqslant t_n \leqslant 1 + \frac{3}{n}.$$

7. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'encadrement :

$$2 \leqslant s_n \leqslant 2 + \frac{6}{n}.$$

8. Déterminer la limite de $\dfrac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Partie 3 : Retour au cas général**

9. Soit $\alpha$ un réel positif ou nul. La suite $(u_n)$ associée à $\alpha$ est-elle convergente ?
10. Déterminer la limite de $\dfrac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## 2 Problème 2 : bonbons cachés

**Partie 1 : Sophie et Germain testent trois boîtes**

Germain dispose de trois boîtes opaques. Il propose un jeu à Sophie qui pourrait permettre à cette dernière de gagner un paquet de bonbons.

1. Dans un premier temps, après avoir caché un paquet de bonbons dans l'une de ces boîtes en laissant les deux autres boîtes vides, Germain propose à Sophie de choisir une de ces trois boîtes et de l'ouvrir pour en remporter le contenu éventuel.

   Comme les boîtes sont opaques, Sophie en choisit une au hasard.

   Avec quelle probabilité choisit-elle la boîte contenant le paquet de bonbons ?
2. Dans un second temps, après avoir caché à nouveau un paquet de bonbons dans l'une de ces trois boîtes en laissant les deux autres boîtes vides, Germain propose à Sophie un jeu qui comporte deux tours :

   - Au premier tour, Sophie choisit une des trois boîtes disposées devant elle, la désigne à Germain mais ne l'ouvre pas.
   - Au second tour, Germain élimine une boîte vide parmi les deux boîtes que Sophie n'a pas choisies, puis laisse à Sophie la possibilité de modifier son choix.

   Une fois ce second tour achevé, Sophie ouvre la boîte qu'elle a choisie et découvre si elle a gagné le paquet de bonbons.

   **a.** Si, au second tour, Sophie décide de conserver le choix fait au premier tour, quelle probabilité a-t-elle de gagner ?

   **b.** Si, au second tour, elle décide de modifier le choix fait au premier tour, quelle probabilité a-t- elle de gagner ?

   **c.** Quelle est la meilleure stratégie pour Sophie : conserver son choix initial, ou le modifier ?

   Dans toute la suite du problème, soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.

   Germain dispose de $n$ boîtes opaques, numérotées par un entier entre 1 et $n$. Avant le début du jeu, il cache un paquet de bonbons dans l'une de ces boîtes ; les $n-1$ autres boîtes sont vides.

   Sophie et Germain vont jouer selon plusieurs règles différentes.

   L'enjeu pour Sophie est dans tous les cas de choisir une boîte en maximisant la probabilité de gagner le paquet de bonbons.

### Partie 2 : Une stratégie pour Sophie

**3.** Après que Germain a caché un paquet de bonbons dans l'une de ces boîtes, un premier jeu se déroule en deux tours :

- Au premier tour de jeu, Sophie choisit une boîte, la désigne à Germain mais ne l'ouvre pas.
- Au second tour, Germain élimine $n-2$ boîtes vides parmi les $n-1$ boîtes que Sophie n'a pas choisies, et laisse à Sophie la possibilité de modifier son choix.

Une fois ce second tour achevé, Sophie ouvre la boîte qu'elle a choisie et découvre si elle a gagné le paquet de bonbons.

**a.** Avec quelle probabilité Sophie a-t-elle choisi la boîte gagnante au premier tour de jeu?

**b.** Au second tour, Sophie a-t-elle intérêt à conserver son choix initial ou à modifier son choix?

Pour corser la situation, Sophie et Germain inventent un second jeu qui se déroule maintenant en $n-1$ tours.

Avant le début du jeu, Germain cache un paquet de bonbons dans une des boîtes.

Au premier tour : Sophie choisit l'une de ces boîtes, la désigne à Germain mais ne l'ouvre pas. Pour chaque $\ell$ entier entre 2 et $n-1$ :

- Lors du $\ell$-ième tour de jeu : Germain élimine, selon son bon plaisir, une boîte parmi le boîtes vides autres que celle que Sophie a choisie au tour précédent; puis il laisse à Sophie la possibilité de modifier son choix.

Une fois ces $n-1$ tours de jeu écoulés Sophie ouvre la boîte qu'elle a choisie au dernier tour et découvre si elle a gagné le paquet de bonbons.

À partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ce problème, Sophie et Germain jouent à ce jeu.

**4. a.** Si Sophie décide de conserver son choix initial pendant les $n-1$ tours, quelle probabilité a-t-elle de gagner?

**b.** Comment peut-elle procéder pour s'assurer de gagner avec probabilité au moins $(n-1)/n$?

### Partie 3 : Une stratégie pour Germain

Soit un entier $n \geqslant 3$. Germain et Sophie continuent de jouer à ce même jeu en $n-1$ tours. Germain souhaite empêcher Sophie de gagner avec une probabilité strictement supérieure à $(n-1)/n$. Pour cela, il adopte la stratégie suivante :

- Avant le début du jeu, Germain sélectionne au hasard la boite dans laquelle il cache le paquet de bonbons.
- À partir du second tour du jeu et jusqu'à la fin, Germain élimine une boite qu'il sélectionne au hasard parmi les boîtes vides (et non encore éliminées) autres que celle que Sophie vient de choisir.

Pour un entier $\ell$ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n-1$, on note $s_\ell$ le numéro de la boite qu'a choisie Sophie lors du $\ell$-ième tour de jeu.
Pour un entier $\ell$ tel que $2 \leqslant \ell \leqslant n-1$, on note $g_\ell$ le numéro de la boîte qu'a éliminée Germain lors du $\ell$-ième tour de jeu.
Plaçons nous au tour $\ell$ après que Germain a éliminé la boîte numéro $g_\ell$.
Soit $b$ le numéro d'une boîte non encore éliminée; on note $p_\ell(b)$ la probabilité, connaissant les numéros $s_1, s_2, \dots, S_{\ell-1}$ et $g_2, g_3, \dots, g_\ell$, que la boîte numéro $b$ contienne le paquet de bonbons.

**5.** Donner, pour tout entier $b$ tel que $1 \leqslant\leqslant n$, la probabilité $p_1(b)$.

**6.** Soit $\ell$ un entier tel que $2 \leqslant \ell \leqslant n-1$, et soit $b$ un numéro de boîte distinct de $g_2, g_3, \dots, g_\ell$.

Démontrer :

$$\frac{p_\ell(s_\ell - 1)}{p_\ell(b)} = \frac{n-\ell}{n+1-\ell} \frac{p_{\ell-1}(s_\ell - 1)}{p_{\ell-1}(b)}.$$

**7.** Soit $\ell$ un entier tel que $2 \leqslant \ell \leqslant n-1$, et soit $b$ et $c$ deux numéros de boîtes distincts de $g_2, g_3, \dots, g_\ell$.

Démontrer :

$$p_\ell(b) \geqslant \frac{n-\ell}{n-1} p_\ell(c).$$

**8.** En déduire que, si Germain applique la stratégie présentée ci-dessus, Sophie ne pourra jamais s'assurer de gagner avec une probabilité strictement supérieure à $(n-1)/n$.

### Partie 4 : Une stratégie pour Sophie et Germain

Évariste, un ami de Sophie et Germain, décide de leur donner un paquet de bonbons s'ils refont une dernière partie (toujours sous les mêmes modalités) et si, à l'issue de ce jeu, Sophie trouve la bonne boite.
Germain a pour obligation de placer le paquet dans une boîte au hasard, sans avoir le droit de communiquer à Sophie la boîte où il a placé le paquet.
Avant de commencer cette ultime partie, Sophie et Germain, peuvent discuter d'une stratégie commune.

**9.** Pour quelles valeurs de $n \geqslant 3$, Sophie et Germain peuvent-ils mettre au point une stratégie, commune qui assurera à Sophie de trouver la boîte avec le paquet?

## 3 Problème 3 : intersections et réunions

Ci-dessous, on note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
Pour tout réel $x$, on note $\operatorname{ent}(x)$ la *partie entière inférieure* de $x$ ; il s'agit de l'unique entier relatif $n$ tel que $n \leqslant x < n+1$.
Par exemple, $\operatorname{ent}(2) = 2$, $\operatorname{ent}(9{,}99) = 9$, $\operatorname{ent}(\pi) = 3$, $\operatorname{ent}(-2) = -2$, et $\operatorname{ent}(-\mathrm{e}) = -3$.
On note aussi $\operatorname{frac}(x)$ la *partie fractionnaire* de $x$ ; il s'agit du réel $x - \operatorname{ent}(x)$, qui appartient à l'intervalle $[0\,;\,1[$.
Ainsi, $\operatorname{frac}(-2) = \operatorname{frac}(2) = 0$, $\operatorname{frac}(9{,}99) = 0{,}99$, $\operatorname{frac}(\pi) = \pi - 3$, et $\operatorname{frac}(-\mathrm{e}) = 3 - \mathrm{e}$.
Pour tous les réels $x$ et $y$, on note également $\max\{x\,;\,y\}$ le plus grand des nombres $x$ et $y$, c'est-à-dire leur maximum, et $\min\{x\,;\,y\}$ le plus petit des nombres $x$ et $y$, c'est-à-dire leur minimum.
On rappelle qu'un nombre réel est rationnel lorsqu'il est égal à une fraction de la forme $\frac{p}{q}$ où $p$ est un entier relatif, $q$ un entier naturel non nul ; lorsque $\operatorname{PGCD}(p, q) = 1$, on dit que $\frac{p}{q}$ est une fraction *irréductible*. Un réel est *irrationnel* lorsqu'il n'est pas rationnel.
Enfin, pour tout réel $x > 0$, on note $\mathcal{E}(x)$ l'ensemble

$$\left\{\operatorname{ent}\left(\frac{n}{x}\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\operatorname{ent}\left(\frac{1}{x}\right); \operatorname{ent}\left(\frac{2}{x}\right); \operatorname{ent}\left(\frac{3}{x}\right); \operatorname{ent}\left(\frac{4}{x}\right); \ldots\right\};$$

il s'agit de l'ensemble des entiers $k \geqslant 0$ pour lesquels il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $k \leqslant \frac{n}{x} < k+1$.
Cet exercice vise à identifier les réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ satisfaisant l'une ou l'autre des propriétés suivantes

Propriété $\mathbf{P}\cap$ : l'intersection des deux ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}(\beta)$ est vide ;

Propriété $\mathbf{P}\cup$ : la réunion des deux ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}(\beta)$ est égale à $\mathbb{N}^*$.

### Partie 1 : Quelques cas particuliers

1. Soit $x$ un réel quelconque.
   - **a.** Démontrer que $x - 1 < \operatorname{ent}(x) \leqslant x$.
   - **b.** Soit $n$ un entier relatif et $y$ un réel tel que $0 \leqslant y < 1$. On suppose que $x = n + y$. Exprimer $n$ et $y$ en fonction de $\operatorname{ent}(x)$ et $\operatorname{frac}(x)$.
2. Soit $x$ un réel strictement positif. Calculer $\mathcal{E}(x)$.
   - **a.** lorsque $x = 1$ ;
   - **b.** lorsque $x > 1$.
3. Lesquelles des propriétés $\mathbf{P}\cap$ et $\mathbf{P}\cup$ sont satisfaites
   - **a.** lorsque $\max\{\alpha\,;\,\beta\} = 1$ ?
   - **b.** lorsque $\max\{\alpha\,;\,\beta\} > 1$ ?
4. Soit $x$ un réel quelconque et $n$ un entier naturel non nul.
   - **a.** Démontrer, pour tout entier $k \geqslant 0$, que $\operatorname{ent}\{n\operatorname{frac}(kx))$ appartient à l'ensemble $\{0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,n-1\}$.
   - **b.** Démontrer qu'il existe deux entiers $k$ et $\ell$ tels que $0 \leqslant k < t \leqslant n$ et
     $$\operatorname{ent}(n\operatorname{frac}(kx)) = \operatorname{ent}(n\operatorname{frac}(\ell x)).$$
   - **c.** On pose $m = \ell - k$. Démontrer que le nombre $\operatorname{frac}(mx)$ appartient à l'un des deux intervalles
     $$\left[0\,;\,\frac{1}{n}\right[ \quad \text{ou} \quad \left[1-\frac{1}{n}\,;\,1\right[$$
   - **d.** On suppose dans cette question que $1 - \frac{1}{n} < \operatorname{frac}(mx) < 1$, et on pose $u = \operatorname{ent}\left(\frac{2}{1-\operatorname{frac}(mx)}\right)$.
     Démontrer que $\operatorname{ent}(umx) = u\operatorname{ent}(mx) + u - 1$ et que $0 \leqslant \operatorname{frac}(umx) < \frac{1}{n}$.
   - **e.** Démontrer que, dans tous les cas, il existe un entier $v \geqslant 1$ pour lequel $0 \leqslant \operatorname{frac}(vx) < \frac{1}{n}$.
5. On suppose dans cette question que $\max\{\alpha\,;\,\beta\} < 1$ et que $\alpha$ est égal à un rationnel $\frac{p}{q}$, où $p$ et $q$ sont des entiers naturels non nuls.
   - **a.** Déduire de la question 4. que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux entiers naturels non nuls $k$ et $\ell$ tels que $qk \leqslant \frac{\ell}{\beta} < qk + \varepsilon$.
   - **b.** Lesquelles des propriétés $\mathbf{P}\cap$ et $\mathbf{P}\cup$ sont satisfaites ?

### Partie 2 : Partition

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant, que l'on appellera *théorème* A :
Les propriétés $\mathbf{P}\cap$ et $\mathbf{P}\cup$ sont simultanément satisfaites si et seulement si $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres irrationnels tels que $\alpha + \beta = 1$.

6. On suppose dans cette question que $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres irrationnels tels que $\max\{\alpha\,;\,\beta\} < 1$.
   - **a.** Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que l'ensemble $\mathcal{E}(a)$ compte $\operatorname{ent}(na)$ éléments compris entre 1 et $n-1$.
   - **b.** Démontrer que, si $\alpha + \beta > 1$, la propriété $\mathbf{P}\cap$ n'est pas satisfaite.
   - **c.** Démontrer que, si $\alpha + \beta < 1$, la propriété $\mathbf{P}\cup$ n'est pas satisfaite.
7. On suppose dans cette question que $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres irrationnels tels que $\alpha + \beta = 1$.
   - **a.** Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\operatorname{ent}(n\alpha) + \operatorname{ent}(n\beta) = n - 1$.

**b.** Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que l'on est dans l'une des deux situations suivantes :

$1^0$ $\mathrm{ent}((n+1)\alpha) = \mathrm{ent}(n\alpha)+1$, $\mathrm{ent}((n+1)\beta = \mathrm{ent}(n\beta)$, $n \in \mathcal{E}(a)$ et $n \notin \mathcal{E}(\beta)$

$2^0$ $\mathrm{ent}((n+1)\alpha) = \mathrm{ent}(n\alpha)$, $\mathrm{ent}((n+1)\beta = \mathrm{ent}(n\beta)+l, n \notin \mathcal{E}(a)$ et $n \in \mathcal{E}(\beta)$.

**8.** Démontrer le théorème A.

### Partie 3 : Intersection vide

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant, que l'on appellera *théorème* B :
La propriété **P**$\cap$ est satisfaite si et seulement si $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres irrationnels pour lesquels il existe deux entiers $u \geqslant 1$ et $v \geqslant 1$ tels que $u\alpha + v\beta = 1$.

**9.** Démontrer que, si $\alpha$ et $\beta$ sont irrationnels et s'il existe deux entiers $u \geqslant 1$ et $v \geqslant 1$ tels que $u\alpha + v\beta = 1$, la propriété **P**$\cap$ est bien satisfaite.

On suppose désormais, pour les questions 10 à 18, que $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels strictement positifs pour lesquels la propriété **P**$\cap$ est satisfaite.

**10.** Démontrer que $\alpha$ et $\beta$ sont irrationnels et que $\max\{\alpha\ ;\ \beta\} < 1$.

On adopte maintenant un point de vue géométrique sur le problème. On identifie chaque point du plan à ses coordonnées, et chaque rectangle à un produit cartésien d'intervalles ; ainsi, lorsque $I$ et $J$ sont deux intervalles, on pourra noter $I \times J$ l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ pour lesquels $x \in I$ et $y \in J$.
On note O l'origine du repère, et $\Omega$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme $(k\alpha + m\ ;\ k\beta + n)$, où $k$, $m$ et $n$ sont des entiers relatifs.

**11.** **a.** Soit A et B deux points de $\Omega$. Démontrer que la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme tout point de $\Omega$ en un point de $\Omega$.

**b.** Soit $\ell$ un entier relatif. Démontrer que la symétrie centrale de centre O et l'homothétie de centre O et de rapport $\ell$ c'est-à dire la transformation qui envoie tout point X sur le point Y tel que $\overrightarrow{OY} = \ell\overrightarrow{OX}$, transforment chaque point de $\Omega$ en un point de $\Omega$.

**12.** Démontrer que, pour chaque point P dans $\Omega$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, il existe un unique triplet d'entiers relatifs $(k\ ;\ m\ ;\ n)$ pour lesquels $x = k\alpha + m$ et $y = k\beta + n$ ; on notera désormais $f(\mathrm{P})$ l'entier $k$ ainsi défini.

**13.** **a.** Démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ est formé des entiers $k \geqslant 0$ pour lesquels

$0 < \mathrm{frac}((k+1)\alpha) < \alpha$.

**b.** En déduire que le rectangle $]0\ ;\ \alpha[\times]0\ ;\ \beta[$ ne contient aucun point $X$ de $\Omega$ tel que $f(X) \geqslant 1$.

**c.** Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Démontrer que le rectangle $]-\varepsilon\ ;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\ ;\ \varepsilon[$ contient un point $Y$ de $\Omega$ tel que $f(Y) \geqslant 1$.

**d.** En déduire que le rectangle $]0\ ;\ \alpha[\times]0\ ;\ \beta[$ ne contient aucun point de $\Omega$.

**14.** **a.** Soit $\varepsilon$ un réel tel que $0 < \varepsilon < \min\{\alpha\ ;\ \beta\}$.
Démontrer que le rectangle $]0\ ;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\ ;\ 0[$ contient un point de $\Omega$.

On note Q un point ainsi obtenu lorsque $\varepsilon = \dfrac{\min\{\alpha\ ;\ \beta\}}{2}$ et et $(s\ ;\ t)$ ses coordonnées. Pour tout point de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on note désormais $g(\mathrm{P})$ la quantité : $\dfrac{x}{s} - \dfrac{y}{t}$.

**b.** Démontrer que, pour tout entier relatif $k$, le rectangle $]ks\ ;\ (k+2)s]\times]kt\ ;\ (k-2)t]$ ne contient aucun point de $\Omega$.

**c.** Démontrer que $\Omega$ ne contient aucun point P tel que $1 < g(P) \leqslant 2$.

**d.** Démontrer que tout point P de $\Omega$ tel que $|g(\mathrm{P})| \leqslant 2$ appartient à la droite (OQ).

**e.** Démontrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un point qui appartient à la fois à la droite (OQ), au rectangle $]0\ ;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\ ;\ 0[$ et à l'ensemble $\Omega$.

**f.** Démontrer que toute droite parallèle à (OQ) et passant par un point du rectangle $]0\ ;\ \alpha[\times[\times]0\ ;\ \beta[$ ne contient aucun point de $\Omega$.

**15.** Soit $x$ un réel strictement positif, et $\mathcal{H}$ un ensemble de réels contenant $x$ mais aucun élément de l'intervalle $]0\ ;\ x[$. On suppose, pour tous réels $y$ et $z$ dans $\mathcal{H}$, que $y - z \in \mathcal{H}$.

Démontrer que $\mathcal{H} = \{kx : k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des réels de la forme $kx$ où $k$ est un entier relatif.

**16.** On note $\Lambda$ l'ensemble des réels $x$ pour lesquels le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$ appartient à une droite parallèle à (OQ) et passant par un point de $\Omega$. On pose également $\lambda : \alpha - \dfrac{s}{t}\beta$.

**a.** Démontrer que $\Lambda$ contient $\lambda$ mais aucun élément de l'intervalle $]0\ ;\ \lambda[$.

**b.** En déduire que $\Lambda = \{k\lambda : k \in \mathbb{Z}\}$.

**17.** On note $\Gamma$ l'ensemble des entiers $f(\mathrm{P})$ obtenus lorsque P est un point de $\Omega$ situé sur la droite (OQ).

**a.** Démontrer que l'ensemble $\Gamma$ contient au moins un entier naturel non nul.

**b.** Soit $\gamma$ le plus petit entier naturel non nul tel que $\gamma \in \Gamma$. Démontrer que $\Gamma = \{k\gamma : k \in \mathbb{Z}\}$.

**c.** En déduire que la fraction $-\dfrac{s}{t}$ est un nombre rationnel.

**18.** Enfin, on note $\dfrac{u}{v}$ le nombre $-\dfrac{s}{t}$ sous forme d'une fraction irréductible, puis on note $W$ l'ensemble des entiers relatifs $\ell$ tels que $\dfrac{\ell}{v} \in \Lambda$.

**a.** Démontrer que $u$ et $v$ appartiennent à $W$.

**b.** En déduire que $W = \mathbb{Z}$.

**19.** Démontrer le théorème B.

### Partie 4 : Réunion et intersections multiples

**20.** Démontrer que la propriété $\mathbf{P}\cup$ est satisfaite si et seulement si $\max\{\alpha\ ;\ \beta\} = 1$, ou $\alpha$ et $\beta$ sont deux irrationnels strictement plus petits que 1 pour lesquels il existe deux entiers $u \geqslant 1$ et $v \geqslant 1$ tels que $u(1-\alpha)+v(1-\beta) = 1$.

**21.** Existe-t-il trois réels strictement positifs $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour lesquels les ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$, $\mathcal{E}(\beta)$ et $\mathcal{E}(\gamma)$ sont deux à deux disjoints ?