Concours contrôleur des douanes session 19 février 2024

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarques préliminaires :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. ***Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.***

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x+2}.$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3+7x^2+4x+1.$$

   a. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation complet.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]-\infty\,;\,-2[$, que l'on notera α.
   On admettra que $\alpha = -2,86$.
   c. L'équation $g(x) = 0$ admet-elle d'autres solutions dans $\mathbb{R}$?

4. Dresser un tableau indiquant, en fonction de x, le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

Exercice 2

Une entreprise de location de voitures sur circuit propose à ses clients deux types de voitures : voiture à moteur classique ou voiture électrique.
Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, la voiture, qu'elle soit électrique ou à moteur classique, est louée avec un pilote.
On sait que :

- 60 % des clients choisissent une voiture électrique ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE ;
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les évènements :

- E : le client choisit une voiture électrique ;
- L : le client prend l'option PILOTE.

Partie A :

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse une voiture électrique et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse une voiture à moteur classique et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à $0,30$.
4. En déduire $P_{\overline{E}}(L)$, probabilité de L sachant que E n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi une voiture électrique ?

Partie B :

Les arrondis se feront à 10^{-4} près.
Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que sa voiture subisse un accident est égale à $0,12$. Cette probabilité est de $0,005$ si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note A l'évènement : sa voiture subit un accident.

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P\left(\overline{L} \cap A\right)$.
2. L'entreprise loue 1 000 voitures.
   À combien d'accidents peut-elle s'attendre ?

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire que pour tout réel $x > 2$,on a $f(x) > 2$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

   a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

   a. Calculer (v_0).

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
En déduire la limite de (u_n).

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Partie A

Soit $(\mathscr{P})$ le plan défini par le point $\text{M}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et par le vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$. Soit $\text{A}(1\ ;\ -4\ ;\ 5)$.

On veut déterminer la distance du point A au plan $(\mathscr{P})$, c'est-à-dire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

1. Exprimer $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n}$ en fonction de la distance AH.
   En déduire $\left|\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n}\right|$.
2. En déduire la distance A au plan $(\mathscr{P})$.

Partie B

Soit $(\mathscr{P})$ le plan défini par le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et par le vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Soit $A\left(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A\right)$ un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan $(\mathscr{P})$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ en fonction de AH, a, b et c.
2. Montrer que $\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right| = \left|ax_A + by_A + cz_A - d\right|$ où d est une constante à préciser.
3. Exprimer alors la distance de A à $(\mathscr{P})$ en fonction de x_A, y_A, z_A, a, b, c et d.