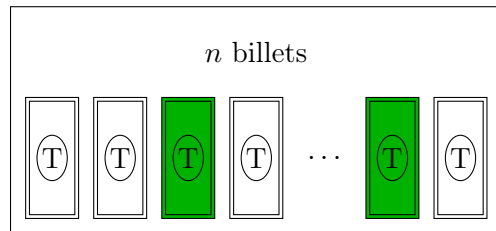


Proposition de correction

SUJET DE BAC S, AMÉRIQUE DU NORD, JUN 1998

EXERCICE 1. (Commun à tous les candidats)

En guise de préambule, réalisons un petit schéma visuel :



On traduit l'énoncé des deux seuls billets gagnants en les colorant en vert, de manière **totale**ment arbitraire.

1. Déterminons le nombre total N de tirages possibles. Cette quantité va nous permettre de calculer les probabilités demandées dans cette question. L'ordre n'important pas ici, le nombre total de tirages simultanés est le nombre de combinaisons de 2 billets parmi les n disponibles. Ainsi :

$$N = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

L'univers Ω associé à cette expérience est tel que : $\text{Card}(\Omega) = \frac{n(n-1)}{2}$.

- a. On suppose que $n = 10$ comme indiqué. Dès lors $\text{Card}(\Omega) = 45$. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de billets gagnants obtenu dans le tirage.

Vu qu'il est tiré 2 billets simultanément, il peut donc avoir soit 1, soit 2, soit aucun billet(s) gagnant(s) tiré(s). Ainsi :

$$X = \{0; 1; 2\}$$

On cherche donc à déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0; 1; 2\}$. Pour obtenir k billets gagnants, il faut tirer simultanément :

- k billet(s) gagnant(s) parmi les 2 qui le sont, soit $\binom{2}{k}$ possibilités.
- $2 - k$ billets parmi les 8 perdants, soit $\binom{8}{2-k}$ possibilités.

On déduit alors :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{2-k}}{45} = \frac{2!}{k!(2-k)!} \times \frac{8!}{(2-k)!(8-2+k)!}$$

Ou encore :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2! \times 8!}{45 \times k! \times (6+k)! \times ((2-k)!)^2}$$

Il ne reste plus qu'à finaliser les calculs :

- Pour $k = 0$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2! \times 8!}{45 \times 6! \times (2!)^2} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{45 \times 2 \times 6!} = \frac{8 \times 7}{45 \times 2} = \frac{28}{45}$$

- Pour $k = 1$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2! \times 8!}{45 \times 7!} = \frac{2 \times 8 \times 7!}{45 \times 7!} = \frac{16}{45}$$

- Pour $k = 2$, pas besoin de faire de calculs, puisque il n'y a qu'une seule chance que le tirage comporte deux billets gagnants. Donc :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{45}$$

D'où la loi de probabilité de X :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

b. On revient au cas général, pour $n \geq 3$. Notons A l'événement « Obtenir exactement un billet gagnant ». Il suffit donc, pour déterminer $\mathbb{P}(A)$, de dénombrer tous les tirages favorables, c'est-à-dire $\text{Card}(A)$. On aura alors :

$$p_n = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Pour avoir exactement un billet gagnant dans le tirage, il faut avoir tiré un billet gagnant parmi les deux disponibles et avoir tiré un billet perdant parmi les $n - 2$ autres billets.

- Il y a donc $\binom{2}{1} = 2$ possibilités d'avoir un billet gagnant.
- Il y a donc $\binom{n-2}{1} = \frac{(n-2)!}{1!(n-3)!} = n - 2$ possibilités d'avoir un billet perdant.

L'ensemble A comporte donc $2(n - 2)$ éléments : $\text{Card}(A) = 2(n - 2)$. On en déduit donc :

$$p_n = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$

Ainsi :
$$p_n = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

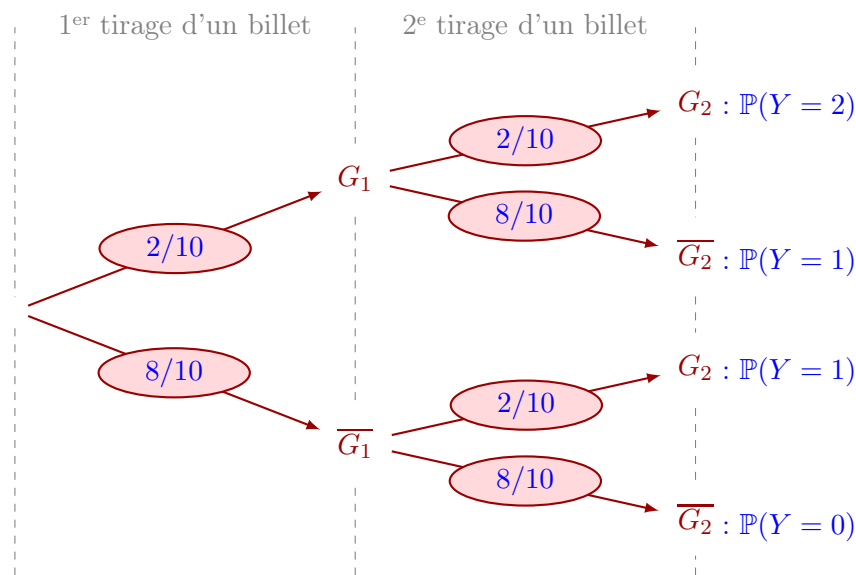
2. On est cette fois dans un tirage avec remise. On peut donc raisonner avec des arbres de probabilité.

a. On suppose que $n = 10$ comme indiqué. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Vu qu'il est tiré 2 billets successivement, il peut donc avoir tiré soit 1, soit 2, soit aucun billet(s) gagnant(s). Ainsi :

$$Y = \{0; 1; 2\}$$

On cherche donc à déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0; 1; 2\}$. Notons G_i l'événement « obtenir un billet gagnant au i -ième tirage ». \overline{G}_i est donc l'événement contraire, c'est-à-dire « obtenir un billet perdant au i -ième tirage ».

Réalisons un arbre du tirage avec ces notations :



Il suffit de réaliser les différents calculs à partir de l'arbre pour obtenir la loi de probabilité de Y . En particulier pour la probabilité $\mathbb{P}(Y = 1)$, on se sert de la formule des probabilités totales. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(G_1 \cap \overline{G}_2) + \mathbb{P}(\overline{G}_1 \cap G_2) \\ &= \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}_{G_1}(\overline{G}_2) + \mathbb{P}(\overline{G}_1) \times \mathbb{P}_{\overline{G}_1}(G_2) \\ &= \frac{2}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} \\ &= \frac{2 \times 16}{100} \\ &= \frac{16}{50} \\ &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité de Y :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

- b. On revient au cas général, pour $n \geq 3$. La probabilité d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis vaut q_n . On réitère le même calcul que précédemment pour $\mathbb{P}(Y = 1)$, mais avec n :

$$q_n = \frac{2}{n} \times \frac{n-2}{n} + \frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n} = \frac{2 \times 2(n-2)}{n^2}$$

D'où $q_n = \frac{4(n-2)}{n^2}$.

3. a. Soit $n \geq 3$. D'après les résultats obtenus, on a :

$$\begin{aligned} p_n - q_n &= \frac{4(n-2)}{n(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n^2} \\ &= \frac{4n(n-2) - 4(n-2)(n-1)}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{4(n-2)(n-n+1)}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

D'où : $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n-2 < n-1$, on en déduit aisément que :

$$\forall n \geq 3, \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < \frac{4}{n^2}$$

Supposons qu'il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{4}{n^2} < 10^{-3}$. On aura alors :

$$\forall n \geq n_0, \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < 10^{-3}$$

On a donc :

$$\frac{4}{n^2} < 10^{-3} \iff n^2 > \frac{4}{10^{-3}} \iff n^2 > 4000 \iff n > \sqrt{4000}$$

Or $\sqrt{4000} \approx 63,2$, on en déduit que :

$$\forall n \geq 64, \frac{4}{n^2} < 10^{-3} \text{ et donc } \forall n \geq 64, \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < 10^{-3}$$

Finalement : Pour $n_0 = 64$, on a : $\forall n \geq n_0, p_n - q_n < 10^{-3}$.

- c. p_n est la probabilité de tirer exactement un billet gagnant dans un tirage sans remise et q_n a probabilité de tirer exactement un billet gagnant dans un tirage avec remise. On a montré en question 3.a. que :

$$\forall n \geq 3, p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$$

Or, pour $n \geq 3$ on déduit sans grande difficulté que $p_n - q_n > 0$, donc $p_n > q_n$. Il est donc préférable de tirer les billets simultanément si l'on a pour objectif d'obtenir exactement un billet gagnant.

De plus, on a montré en question 3.b., qu'à partir de 64 billets (ce qui est peu pour une loterie), la probabilité des deux situations diffère de 0,001. De plus, on a clairement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} = 0$$

Donc les deux probabilités deviennent équivalente dès lors que le nombre total de billets est grand. Pour se donner un ordre d'idée, l'écart passe à 10^{-6} pour $n = 2000$ billets.

EXERCICE 2.

(Enseignement obligatoire)

On note A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point $M(z)$ du plan :

- $M_1(z_1)$ est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- $M'(z')$ est l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

T est la transformation qui à chaque point M associe M' .

1. a. L'affixe z_1 d'un point M_1 obtenu par rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ à partir d'un point $M(z)$ s'écrit :

$$z_1 - 0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 0) \iff z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z$$

De plus, l'affixe z' d'un point M' obtenu par translation de vecteur \vec{u} à partir d'un point $M(z)$ s'écrit :

$$z' = z_1 - 1$$

D'où, en remplaçant z_1 , il vient : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

b. On remarque que :

$$z_B = \frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Ainsi, d'après la question précédente, l'image de B par T s'écrit :

$$z'_B = T(z_B) \iff z'_B = e^{i\frac{\pi}{3}}z_B - 1 \iff z'_B = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

L'image B' de B par T est donc $\boxed{\text{le point } O}$.

c. Montrons que T admet un unique point invariant, qu'on note I . Un point $M(z)$ est invariant par T si et seulement si $M' = M$, c'est-à-dire :

$$z' = z \iff e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 = z \iff (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)z = 1 \iff z = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1}$$

$$\text{Or } e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$\text{On déduit donc } \boxed{z_I = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Complément : d'après ce qu'on a vu, on a $\begin{cases} z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 \\ z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}z_I - 1 \end{cases}$. En retranchant membre à membre, il vient :

$$z' - z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_I)$$

T est donc une rotation de centre $I(z_I)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels.

a. Soit $z \neq 0$. En se servant du résultat de la question 1.a. :

$$\frac{z'}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{x + iy}$$

$$\text{Or } \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \text{ Ainsi :}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

D'où, en regroupant les termes de la partie réelle et ceux de la partie imaginaire :

$$\frac{z'}{z} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

On peut donc conclure que $\boxed{\Re \left(\frac{z'}{z} \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2}}$.

b. On cherche l'ensemble (E) des points M du plan tels que OMM' soit un triangle rectangle en O .

- Il faut déjà que $M \neq O$ et $M' \neq O$, c'est-à-dire $M' \neq B$ (d'après la question 1.b.).
- Ensuite, pour que OMM' soit un triangle rectangle en O , il faut que \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux. Par propriété :

$$\overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OM'} \text{ sont orthogonaux } \iff \frac{z_{\overrightarrow{OM'}}}{z_{\overrightarrow{OM}}} \in i\mathbb{R}$$

Autrement dit, démontrons que $\Re \left(\frac{z_{\overrightarrow{OM'}}}{z_{\overrightarrow{OM}}} \right) = 0$. De plus, on a :

$$\frac{z_{\overrightarrow{OM'}}}{z_{\overrightarrow{OM}}} = \frac{z' - 0}{z - 0} = \frac{z'}{z}$$

Or, d'après la question précédente $\Re \left(\frac{z'}{z} \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2}$. Cherchons donc x et y tels que :

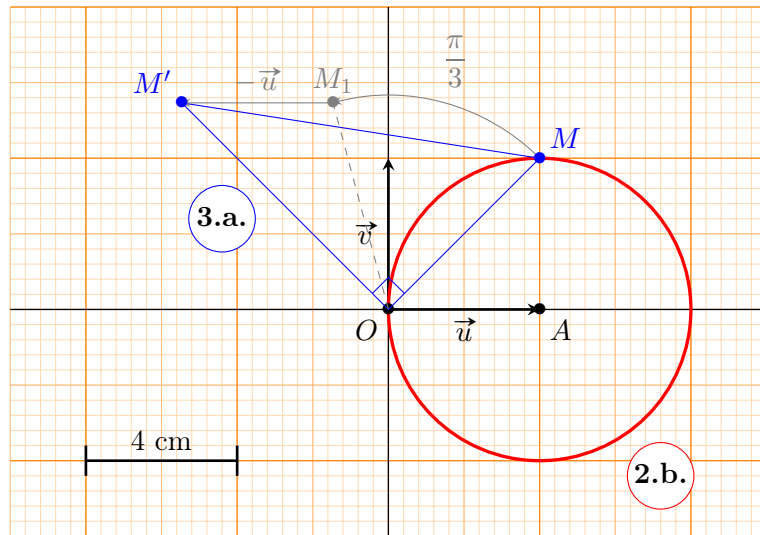
$$\Re \left(\frac{z'}{z} \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 \iff \frac{x^2 + y^2 - 2x}{2(x^2 + y^2)} = 0$$

C'est-à-dire $x^2 + y^2 - 2x = 0$, ou encore :

$$\underbrace{x^2 - 2x + (1-1)}_{(x-1)^2} + y^2 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$$

On reconnaît là une équation de cercle de centre $A(1; 0)$, c'est-à-dire A , et de rayon 1.

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre $A(1; 0)$ et de rayon 1, privé des points O et B . Le tracé (en rouge) donne :



Nota : la figure est à l'échelle 1:2, pour des raisons de place.

3. On pose $z = 1 + i$.

a. Montrons que $M \in (E)$. Avec la notation de la question 2., on a $x = 1$ et $y = 1$. $M(1; 1)$ n'est ni le point $O(0; 0)$ ni le point $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ainsi, en remplaçant x et y par ces valeurs dans le membre de gauche de l'équation du cercle obtenue en question 2.b., on a :

$$(1-1)^2 + (1-0)^2 = 0^2 + 1^2 = 0 + 1 = 1$$

L'équation est vérifiée, ce qui prouve que $M \in (E)$. On complète la figure de la question 2.b..

b. D'après ce qui précède, comme $M \in (E)$, alors $\Re\left(\frac{z'}{z}\right) = 0$ et :

$$\frac{z'}{z} = i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs, on obtient :

$$\frac{z'}{z} = i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = i \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Dès lors :

$$\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} = |i| \times \left| \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Or $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, on déduit :

$$|z'| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} |z| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \times \sqrt{2}$$

D'où $|z'| = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$.

c. Comme $M \in (E)$, le triangle OMM' est donc rectangle en O et l'aire s'exprime comme suit :

$$\mathcal{A}_{OMM'} = \frac{OM \times OM'}{2} = \frac{|z_{\overrightarrow{OM}}| \times |z_{\overrightarrow{OM'}}|}{2} = \frac{|z| \times |z'|}{2}$$

D'après les calculs de modules réalisés en question précédente :

$$\mathcal{A}_{OMM'} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}}{2}$$

D'où : $\mathcal{A}_{OMM'} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$. Or, comme une unité graphique vaut 4 cm, l'aide en cm^2 vaut alors :

$$\mathcal{A}_{OMM'} = 8(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^2$$

EXERCICE 2.*(Enseignement de spécialité)*

Dans le plan orienté, on donne un carré $ABCD$ de sens direct tel que $AB = 1$ (on prendra 9 cm comme unité graphique) et les points A_1 et B_1 définis par :

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{2}{9}\overrightarrow{BC}$$

On désigne par S la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M_1 d'affixe z_1 définie par :

$$z_1 = \frac{6+2i}{9}z + \frac{1}{3}$$

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. On déduit, pour la suite de l'exercice :

$$z_A = 0 \quad ; \quad z_B = 1 \quad ; \quad z_C = 1+i \quad ; \quad z_D = i$$

1. L'expression complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ donc S est une similitude. Le point invariant vérifie $z_\Omega = az_\Omega + b$, c'est-à-dire :

$$z_\Omega = \frac{6+2i}{9}z_\Omega + \frac{1}{3} \iff \frac{3-2i}{9}z_\Omega = \frac{1}{3} \iff z_\Omega = \frac{3}{3-2i}$$

Ou encore :

$$z_\Omega = \frac{3(3+2i)}{9+4} \iff z_\Omega = \frac{9}{13} + \frac{6}{13}i$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point } \Omega \text{ vaut } z_\Omega = \left(\frac{9}{13} + \frac{6}{13}i\right)}, \text{ ou encore } \Omega \left(\frac{9}{13}; \frac{6}{13}\right).$$

2. En préambule, traduisons en affixes les deux égalités vectorielles de l'énoncé :

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \iff z_{A_1} - 0 = \frac{1}{3}(z_B - 0) \iff z_{A_1} = \frac{1}{3}$$

Puis :

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{2}{9}\overrightarrow{BC} \iff z_{B_1} - z_B = \frac{2}{9}(z_C - z_B) \iff z_{B_1} = 1 + \frac{2}{9}i$$

- a. L'image du point A par S vaut :

$$z_1(A) = \frac{6+2i}{9}z_A + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \iff \boxed{S(A) = A_1}$$

De même, l'image du point B par S vaut :

$$z_1(B) = \frac{6+2i}{9}z_B + \frac{1}{3} = \frac{6+2i}{9} + \frac{1}{3} = \frac{9+2i}{9} = 1 + \frac{2}{9}i \iff \boxed{S(B) = B_1}$$

- b. Calculons l'affixe de $D_1 = S(D)$:

$$z_{D_1} = \frac{6+2i}{9}z_D + \frac{1}{3} = \frac{6+2i}{9}i + \frac{1}{3} = \frac{6i}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{6i}{9} + \frac{1}{9}$$

$$\text{D'où } \boxed{D_1 \left(\frac{1+6i}{9}\right)}$$

- c. On remarque que :

$$z_{\overrightarrow{DD_1}} = z_{D_1} - z_D = \frac{1+6i}{9} - i = \frac{1-3i}{9}$$

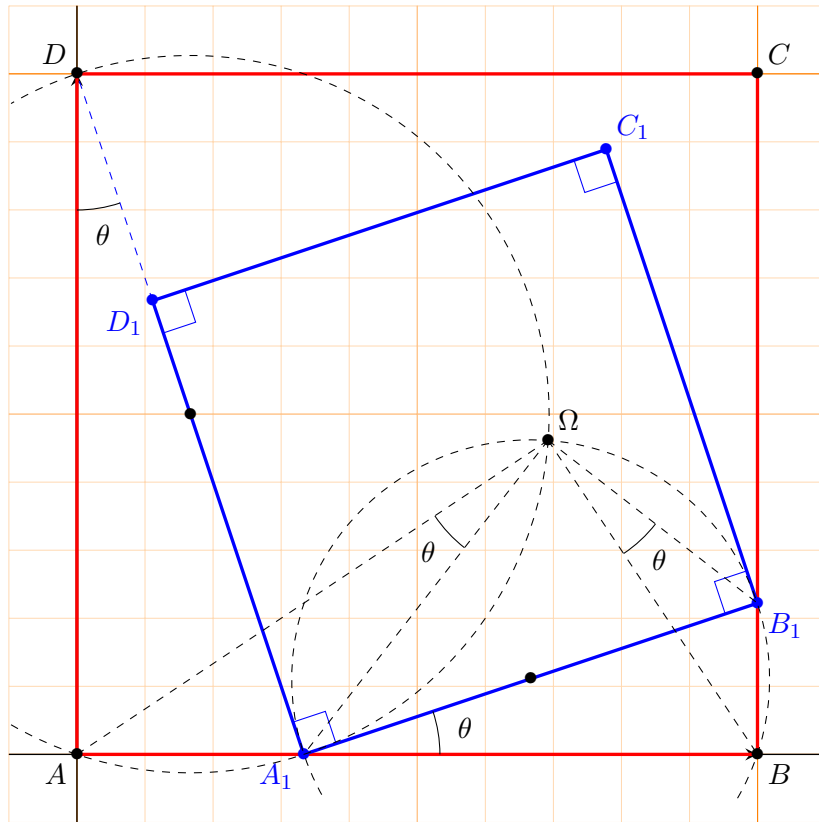
De plus :

$$z_{\overrightarrow{DA_1}} = z_{A_1} - z_D = \frac{1}{3} - i = \frac{1-3i}{9}$$

Donc $z_{\overrightarrow{DD_1}} = \frac{1}{3}z_{\overrightarrow{DA_1}}$, les vecteurs $\overrightarrow{DD_1}$ et $\overrightarrow{DA_1}$ sont colinéaires. On a donc montré que $\boxed{D_1 \in [DA_1]}$.

- d. On sait que $A_1 = S(A)$, $B_1 = S(B)$ et $D_1 = S(D)$. Or, par une similitude directe, l'image d'un carré direct est un carré direct. Comme $ABCD$ est un carré direct, on déduit par construction le point C_1 du fait que $A_1B_1C_1D_1$ soit aussi un carré direct.

La figure est présentée en suivant.



3. a. Montrons que les trois angles sont égaux.

- Pour une similitude $z' = az + b$, $\theta = \arg(a)$, donc dans notre cas :

$$\theta = \arg\left(\frac{6+2i}{9}\right) = \arg\left(\frac{2(3+i)}{3 \times 3}\right) = \arg\left(\frac{2}{3} \times \frac{3+i}{3}\right) [2\pi]$$

Par propriété des arguments, on déduit :

$$\theta = \arg\left(\frac{2}{3}\right) + \arg\left(1 + \frac{1}{3}i\right) [2\pi]$$

$$\text{Or } \arg\left(\frac{2}{3}\right) = 0 [2\pi], \text{ d'où : } \theta = \arg\left(1 + \frac{1}{3}i\right) [2\pi]. \quad (\star)$$

- Déterminons l'angle $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DA_1})$ en utilisant les arguments :

$$(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DA_1}) = \arg\left(\frac{z_{A_1} - z_D}{z_1 - z_D}\right) = \arg\left(\frac{\frac{1}{3} - i}{0 - i}\right) [2\pi]$$

Or, comme $\frac{1}{i} = -i$, on déduit :

$$(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DA_1}) = \arg\left(i \times \left(\frac{1}{3} - i\right)\right) = \arg\left(1 + \frac{1}{3}i\right) [2\pi]. \quad (\star\star)$$

- De même, pour l'angle $(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1B_1})$:

$$(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1B_1}) = \arg\left(\frac{z_{B_1} - z_{A_1}}{z_B - z_{A_1}}\right) = \arg\left(\frac{1 + \frac{2}{9}i - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}\right) [2\pi]$$

En simplifiant par $\frac{2}{3}$, il vient :

$$(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1B_1}) = \arg\left(\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{9}i}{\frac{2}{3}}\right) = \arg\left(1 + \frac{1}{3}i\right) [2\pi] \quad (\star\star\star)$$

Conclusion : de (\star) , $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, on déduit :

$$\boxed{(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DA_1}) = (\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1B_1}) = \theta [2\pi]}$$

- b. Par définition de la similitude $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A_1}) = (\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega B_1}) = \theta [2\pi]$ puisque $A_1 = S(A)$ et $B_1 = S(B)$ (question 2.a.).

D'après le résultat obtenu en question précédente, on a donc :

- D'une part $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DA_1}) = (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A_1}) = \theta [2\pi]$. Ces angles étant définis par rapport au segment $[AA_1]$, ils sont donc inscrits et les points A, A_1, Ω et D appartiennent à un même cercle. Comme le triangle DAA_1 est rectangle en A , il s'agit du cercle circonscrit au triangle DAA_1 , dont le centre et le milieu de $[A_1D]$.

- D'autre part $(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1B_1}) = (\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega B_1}) = \theta[2\pi]$. Ces angles étant définis par rapport au segment $[BB_1]$, ils sont donc inscrits et les points B, B_1, Ω et A_1 appartiennent à un même cercle. Comme le triangle A_1BB_1 est rectangle en B , il s'agit du cercle circonscrit au triangle A_1BB_1 , dont le centre et le milieu de $[A_1B_1]$.

Comme Ω appartient à ces deux cercles, leur intersection permet de trouver Ω (voir tracés en **2.d**).

PROBLÈME. *(Enseignement obligatoire et de spécialité)*

Pour un entier $n \geq 2$, on considère les fonctions f_n définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}$$

Pour toute la suite, on note $J =]0; +\infty[$.

Partie A

I - Étude des fonctions f_n

1. Soit $x \in J$ et $n \geq 2$ un entier. f_n est dérivable sur J en tant que somme et quotient de fonctions usuelles dérivables sur J . Posons :

$$\begin{cases} u(x) = 1 + n \ln(x) \\ v(x) = x^2 \end{cases} \quad u \text{ et } v \text{ sont dérivables sur } J, \text{ donc : } \begin{cases} u'(x) = \frac{n}{x} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$$

Ainsi, d'après les formules de dérivation, il vient :

$$f'_n(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{nx - 2x - 2nx \ln(x)}{x^4}$$

Ou encore, en simplifiant par x : $f'_n(x) = \frac{n - 2 - 2n \ln(x)}{x^3}$.

2. Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$ revient à résoudre :

$$n - 2 - 2n \ln(x) = 0 \iff 2n \ln(x) = n - 2 \iff \ln(x) = \frac{n - 2}{2n}$$

Comme $x \in J$, on déduit donc : $f'_n(x) = 0 \iff x = e^{\frac{n-2}{2n}}$.

Le signe de $f'_n(x)$ ne dépend que de la quantité $n - 2 - 2n \ln(x)$, puisque $x^3 > 0$ sur J . Ainsi :

$$f'_n(x) \geq 0 \iff n - 2 - 2n \ln(x) \geq 0 \iff 2n \ln(x) \leq n - 2 \iff x \leq e^{\frac{n-2}{2n}}$$

On déduit aisément l'autre sens ; finalement :

$$\begin{cases} \bullet \forall x \in]0; e^{\frac{n-2}{2n}}], f'_n(x) \geq 0. \\ \bullet \forall x \in [e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty[, f'_n(x) \leq 0. \end{cases}$$

3. Transformons notre expression de f_n :

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2} + n \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, et, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} n \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Ainsi, par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

4. On déduit, de tout ce qui précède, le tableau de variation suivant :

x	0	$e^{\frac{n-2}{2n}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0
$f_n(x)$	$-\infty$	$\frac{n}{2} e^{\frac{2-n}{n}}$	0

En effet, en $e^{\frac{n-2}{2n}}$, on obtient :

$$f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{1 + n \ln\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)}{\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)^2} = \frac{1 + \frac{n-2}{2}}{e^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{n}{2} e^{\frac{2-n}{n}}$$

De plus, en 0^+ , il n'y a pas de difficulté pour justifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$.

II - Représentation graphique de quelques fonctions f_n

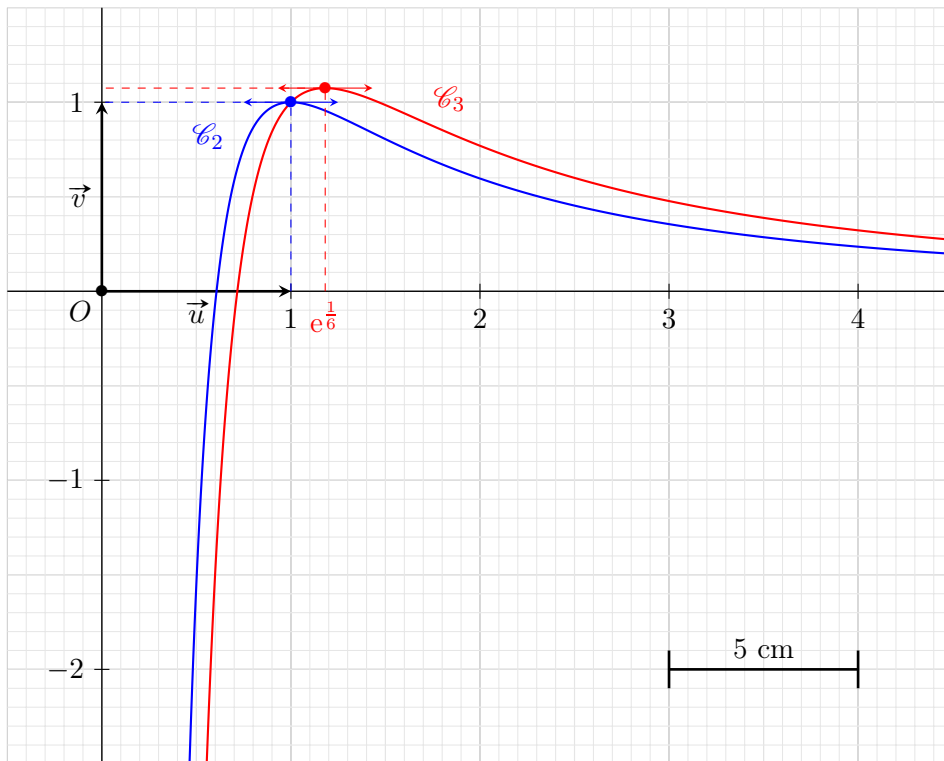
1. Exprimons f_2 et f_3 :

$$f_2(x) = \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_3(x) = \frac{1 + 3 \ln(x)}{x^2}$$

Pour construire \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 , exploitons les résultats du tableau de variation :

- f'_2 s'annule en 1 et f'_3 en $e^{\frac{1}{6}}$. Donc \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 admettent une tangente horizontale en ces points.
- Des calculs de limite de f_n , on déduit que \mathcal{C}_n admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et verticale d'équation $x = 0$.

On obtient donc les courbes suivantes :



Nota : la figure est à l'échelle 1:2, pour des raisons de place.

2. a. Soit $n \geq 2$ et $x \in J$. On a :

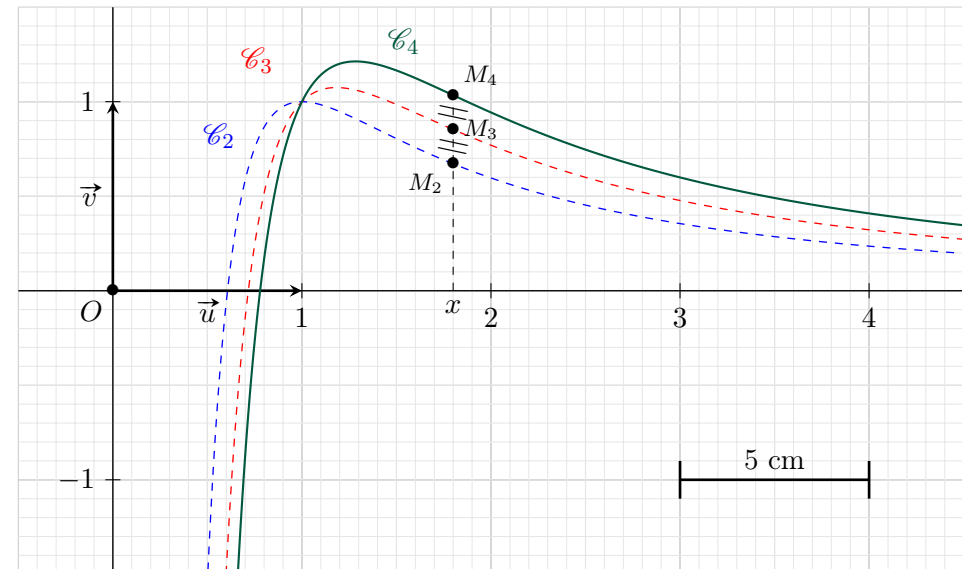
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{1 + (n+1) \ln(x)}{x^2} - \frac{1 + n \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1 + (n+1) \ln(x) - 1 - n \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1 + n \ln(x) + \ln(x) - 1 - n \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est indépendant de n .

b. D'après ce qui précède, on peut écrire que :

$$f_4(x) - f_3(x) = f_3(x) - f_2(x) \iff f_3(x) = \frac{f_2(x) + f_4(x)}{2}$$

Ainsi, si on appelle M_2 , M_3 et M_4 respectivement les points de \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 d'abscisses x , alors M_3 est le milieu de $[M_2M_4]$. On obtient donc le point M_4 comme symétrique de M_2 par rapport à M_3 .



Partie B : calculs d'aires

1. Soit $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$. Posons, pour $x \in [1; e]$: $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$.
 u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; e]$. Donc, pour tout $x \in [1; e]$:

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\underbrace{\int_1^e u(x)v'(x) dx}_{=I} = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx$$

En remplaçant par les expressions de $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$, on peut écrire que :

$$I = \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - 0 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e$$

Ainsi :

$$I = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) \iff \boxed{I = 1 - \frac{2}{e}}$$

2. La traduction, à l'aide d'intégrales, de l'aire du domaine plan limité par les courbes \mathcal{C}_n , \mathcal{C}_{n+1} et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$, s'écrit :

$$\int_1^e f_{n+1}(x) dx - \int_1^e f_n(x) dx = \int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx$$

D'après le résultat de la question **A2.a.**, on peut écrire :

$$\int_1^e f_{n+1}(x) dx - \int_1^e f_n(x) dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx = I$$

Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\int_1^e f_{n+1}(x) dx - \int_1^e f_n(x) dx = 1 - \frac{2}{e}}$.

3. On note \mathcal{A}_n l'aire du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C}_n et les droites d'équations $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$.

- a. On calcule \mathcal{A}_2 :

$$\mathcal{A}_2 = \int_1^e f_2(x) dx = \int_1^e \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + 2 \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Ou encore :

$$\mathcal{A}_2 = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e dx + 2I = -\frac{1}{e} + 1 + 2 - \frac{4}{e} \iff \boxed{\mathcal{A}_2 = 3 - \frac{5}{e}}$$

- b. D'après la question **B2.**, en raisonnant sur les aires, on a :

$$\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n = I$$

La suite (\mathcal{A}_n) est donc arithmétique de raison $r = I$ et de premier terme $\mathcal{A}_2 = 3 - \frac{5}{e}$.

Partie C : étude sur l'intervalle $]1; +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$

On prendra $n \geq 3$.

1. a. Soit $n \geq 3$. On a aisément $\frac{n-2}{2n} > 0$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , on en déduit :

$$e^{\frac{n-2}{2n}} > e^0 \iff \boxed{e^{\frac{n-2}{2n}} > 1}$$

Par ailleurs, la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $]0; e^{\frac{n-2}{2n}}]$ (voir question **A4.**), donc l'est sur la restriction à $[1; e^{\frac{n-2}{2n}}]$.

D'où :

$$f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} \right) > f_n(1) \iff \boxed{f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} \right) > 1}$$

- b. C'est immédiat du fait que f_n soit strictement croissante sur l'intervalle $]1; e^{\frac{n-2}{2n}}[$ et que $f_n(1) = 1$.

2. On se place sur l'intervalle $K = \left[e^{\frac{n-2}{2n}} ; +\infty \right[$. Raisonnons par étapes :

- f_n est dérivable sur J (d'après la question **A1.**), donc sur $K \subset J$. f_n est donc continue sur K .
- f_n est strictement décroissante sur K (d'après la question **A4.**).
- De plus, d'après le tableau de variation (question **A4.**) :

$$f_n(K) = \left] 0 ; \frac{n}{2} e^{\frac{2-n}{n}} \right]$$

Donc $1 \in f_n(K)$ puisque $n \geq 3$.

- **Conclusion** : d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc conclure que l'équation

$$f_n(x) = 1 \text{ admet une unique solution } \alpha_n \text{ sur } K.$$

3. a. Calculons $f_n(\sqrt{n})$:

$$f_n(\sqrt{n}) = \frac{1 + n \ln(\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1 + n \ln(\sqrt{n})}{n}$$

Comme la fonction racine est strictement croissante sur \mathbb{R} , alors pour $n > e^2$, $\sqrt{n} > e$. Puis, la fonction \ln étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on déduit $\ln(\sqrt{n}) > \ln(e) = 1$.

Puis, s'en suit $n \ln(\sqrt{n}) > n$ puis $\frac{1 + n \ln(\sqrt{n})}{n} > \frac{1 + n}{n} = \frac{1}{n} + 1$.

On en déduit donc que, $\left(\text{pour } n > e^2, f_n(\sqrt{n}) \geq 1 \right)$.

b. On se place pour $n \geq 8$. Donc $n > e^2$ (puisque $e^2 \approx 7,389$). Dès lors, d'après le résultat précédent :

$$f_n(\sqrt{n}) \geq 1$$

De plus, $\sqrt{n} > e \geq e^{\frac{n-2}{2n}}$, puisque $\frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < 1$. On raisonne donc ici sur l'intervalle $K = \left[e^{\frac{n-2}{2n}} ; +\infty \right[$

Or, d'après la question **C2.**, sur K , $f_n(\alpha_n) = 1$, on peut donc écrire :

$$f_n(\sqrt{n}) \geq f_n(\alpha_n)$$

Enfin, d'après le tableau de variation de f_n (question **A4.**), sur K , f_n est strictement décroissante, ce qui nous permet de déduire : $\alpha_n \geq \sqrt{n}$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$$

Fin du corrigé