

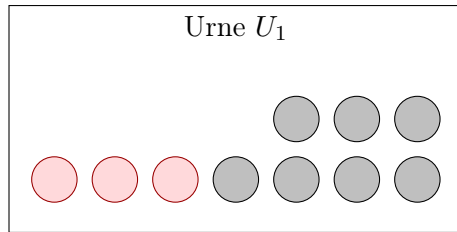
# Proposition de correction

## SUJET DE BAC S, PONDICHÉRY, AVRIL 1998

### EXERCICE 1.

*(Commun à tous les candidats)*

1. Réalisons un petit schéma de l'urne  $U_1$  :



On tire deux boules simultanément de cette urne. Déterminons le nombre total  $n$  de tirages possibles. Cette quantité va nous permettre de calculer les probabilités demandées dans cette question. L'ordre n'importe pas ici, le nombre total de tirages simultanés est le nombre de combinaisons de 2 boules parmi les  $7 + 7 = 14$  disponibles. Ainsi :

$$n = \binom{14}{2} = 91$$

L'univers  $\Omega$  associé à cette expérience est tel que :  $\text{Card}(\Omega) = n = 91$ .

a. Comme précisé, l'urne contient 7 boules rouges et tous les tirages sont équiprobables. En notant  $R_{U_1}$  l'événement « tirer deux boules rouges de  $U_1$  », il suffit donc, pour déterminer  $p_1 = \mathbb{P}(R_{U_1})$ , de dénombrer tous les tirages favorables, c'est-à-dire  $\text{Card}(R_{U_1})$ . On aura alors :

$$p_1 = \frac{\text{Card}(R_{U_1})}{\text{Card}(\Omega)}$$

Dans un tirage, il y a  $\binom{7}{2} = 21$  possibilités d'obtenir deux boules rouges.

Ainsi :

$$p_1 = \frac{21}{91} \iff p_1 = \frac{3}{13} \approx 23,1\%$$

b. Par un raisonnement analogue, en notant  $N_{U_1}$  l'événement « tirer deux boules noires », il suffit de déterminer  $\text{Card}(N_{U_1})$ . Il y a  $\binom{7}{2} = 21$  possibilités d'obtenir deux boules noires. Ainsi :

$$p_2 = \frac{21}{91} \iff p_2 = \frac{3}{13} \approx 23,1\%$$

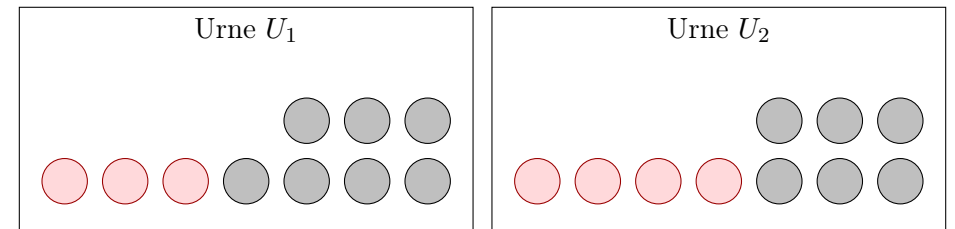
c. Pour que les deux boules tirées sont de mêmes couleurs, soit elles sont rouge (c'est l'événement  $R_{U_1}$  qui est réalisé), soit elles sont noires (c'est l'événement  $N_{U_1}$  qui est réalisé). Ainsi  $p_3 = \mathbb{P}(R_{U_1} \cup N_{U_1})$ . Comme  $R_{U_1}$  et  $N_{U_1}$  sont incompatibles (on ne peut avoir deux boules rouges et deux boules noires en même temps), alors :

$$p_3 = \mathbb{P}(R_{U_1}) + \mathbb{P}(N_{U_1}) = p_1 + p_2 = \frac{3}{13} + \frac{3}{13} \iff p_3 = \frac{6}{13} \approx 46,2\%$$

d. Pour que les deux boules soient de couleurs différentes, il ne faut pas avoir tiré deux boules de couleurs identiques : c'est donc l'événement contraire de celui de la question précédente. Ainsi :

$$p_4 = 1 - p_3 = 1 - \frac{6}{13} \iff p_4 = \frac{7}{13} \approx 53,8\%$$

2. Réalisons un petit schéma de la situation :



On tire deux boules simultanément de l'urne  $U_1$  et une boule de l'urne  $U_2$ . Déterminons le nombre total  $n'$  de tirages possibles. Cette quantité va nous permettre de calculer les probabilités demandées dans cette question. L'ordre n'importe pas ici, le nombre total de tirages simultanés est le produit du nombre de combinaisons de 2 boules parmi les  $7 + 3 = 10$  disponibles de l'urne  $U_1$  par le nombre de combinaisons de 1 boule parmi les  $6 + 4 = 10$  de l'urne  $U_2$ . Ainsi :

$$n' = \binom{10}{2} \times \binom{10}{1} = 45 \times 10 = 450$$

L'univers  $\Omega'$  associé à cette expérience est tel que :  $\text{Card}(\Omega') = n' = 450$ .

On note les événements :

- $R$  : « les trois boules tirées sont rouges »
  - $D$  : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »
  - $B$  : « la boule tirée dans l'urne  $U_2$  est rouge ».
- a. Pour déterminer  $\mathbb{P}(R)$ , il nous suffit de dénombrer tous les tirages favorables, c'est-à-dire  $\text{Card}(R)$ . On aura alors :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{\text{Card}(R)}{\text{Card}(\Omega')}$$

Dans un tirage, élément de  $R$ , on a donc 2 boules de l'urne  $U_1$  et une boule de l'urne  $U_2$ .

- Il y a donc  $\binom{3}{2} = 3$  possibilités d'obtenir 2 boules rouges de  $U_1$
- Il y a donc  $\binom{4}{1} = 4$  possibilités d'obtenir 1 boule rouge de  $U_2$ .

L'ensemble  $R$  comporte donc  $4 \times 3 = 12$  éléments :  $\text{Card}(R) = 12$ . On en déduit donc :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{\text{Card}(R)}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{12}{450}$$

Ainsi :  $\mathbb{P}(R) = \frac{2}{75} = 2,67\%$

- b. Par un raisonnement analogue, en notant  $N$  l'événement « les trois boules tirées sont noires » :

- Il y a  $\binom{7}{2} = 21$  possibilités d'obtenir 2 boules noires de  $U_1$
- Il y a  $\binom{6}{1} = 6$  possibilités d'obtenir 1 boule noire de  $U_2$ .

Donc la probabilité d'obtenir 3 boules noires vaut  $\mathbb{P}(N) = \frac{6 \times 21}{450} = \frac{21}{75}$ .

Ainsi, pour que les trois boules tirées soient de mêmes couleurs, soit elles sont rouge (c'est l'événement  $R$  qui est réalisé), soit elles sont noires (c'est l'événement  $N$  qui est réalisé). Ainsi la probabilité cherchée vaut  $\mathbb{P}(R \cup N)$ . Comme  $R$  et  $N$  sont incompatibles (on ne peut avoir trois boules rouges et trois boules noires en même temps), alors :

$$\mathbb{P}(R \cup N) = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(N) = \frac{2}{75} + \frac{21}{75} \iff \mathbb{P}(R \cup N) = \frac{23}{75} \approx 30,67\%$$

- c. Par définition des probabilités conditionnelles, on peut écrire que :

$$p_D(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$$

- **Calcul de  $\mathbb{P}(D)$ .** Pour que les trois boules soient de couleurs différentes, il ne faut pas avoir tiré trois boules de couleurs identiques : c'est donc l'événement contraire de celui de la question précédente. Ainsi :

$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(R \cup N) = 1 - \frac{23}{75} = \frac{52}{75}$$

- **Calcul de  $\mathbb{P}(B \cap D)$ .** On peut dire que l'événement  $B \cap D$  est la réunion des deux événements suivants :
  - $D_1$  : « on a tiré deux boules noires de  $U_1$  et une boule rouge de  $U_2$  »
  - $D_2$  : « on a tiré une boule rouge et une boule noire de  $U_1$  et une boule rouge de  $U_2$  ».

Ainsi, on a :  $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}(D_1 \cup D_2) = \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2)$  car ces événements sont incompatibles. En réitérant les raisonnements réalisés

précédemment, on écrit directement :

$$\mathbb{P}(D_1) = \frac{\overbrace{\binom{7}{2}}^{2 \text{ boules noires de } U_1} \times \overbrace{\binom{4}{1}}^{1 \text{ boule rouge de } U_2}}{450} = \frac{21 \times 4}{450} = \frac{14}{75}$$

Et :

$$\mathbb{P}(D_2) = \frac{\overbrace{\binom{3}{1} \times \binom{7}{1}}^{1 \text{ boule rouge et 1 boule noire de } U_1} \times \binom{4}{1}}{450} = \frac{3 \times 7 \times 4}{450} = \frac{14}{75}$$

D'où :  $\mathbb{P}(B \cap D) = \frac{14}{75} + \frac{14}{75} = \frac{28}{75}$ .

• **Conclusion.** On en déduit donc la probabilité cherchée :

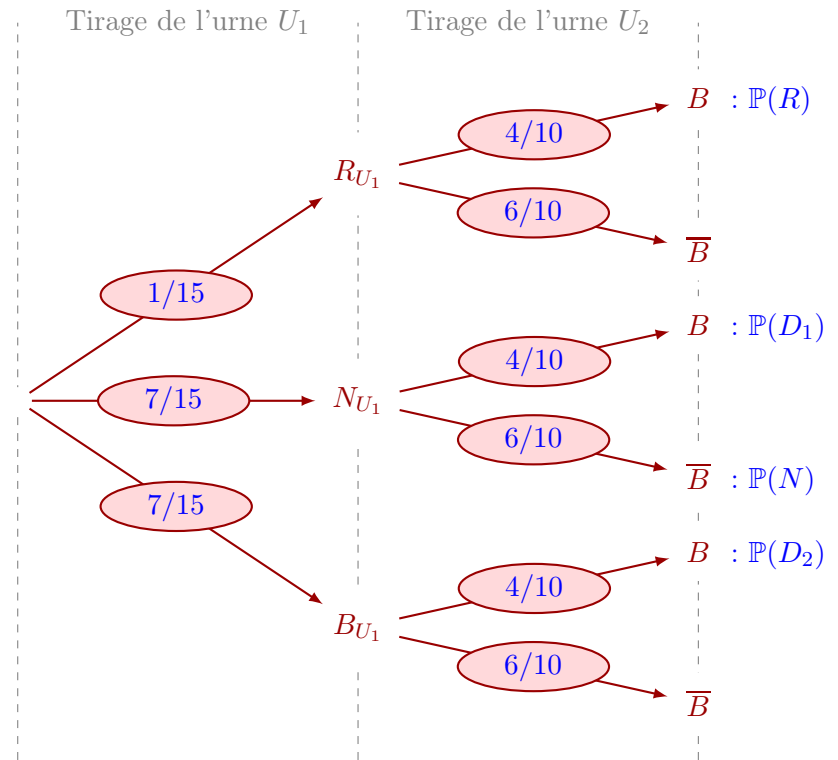
$$p_D(B) = \frac{28}{75} = \frac{28}{52} \iff p_D(B) = \frac{7}{13}$$

**Complément**

La question 2. peut entièrement s'effectuer grâce à un arbre de probabilité. Rappelons l'ensemble des événements et complétons les :

- $R_{U_1}$  : « tirer deux boules rouges de  $U_1$  »
- $N_{U_1}$  : « tirer deux boules noires de  $U_1$  »
- $B_{U_1}$  : « tirer une boule rouge et une boule noire de  $U_1$  »
- $D_1$  : « on a tiré deux boules noires de  $U_1$  et une boule rouge de  $U_2$  »
- $D_2$  : « on a tiré une boule rouge et une boule noire de  $U_1$  et une boule rouge de  $U_2$  ».
- Et les événements de l'énoncé

Avec les probabilités calculées dans la première questions et ce qu'on peut déduire de l'équiprobabilité des tirages de l'unique boule de  $U_2$ , on obtient l'arbre suivant :



- De l'arbre, on lit :  $\mathbb{P}(R) = \frac{1}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{75}$ .
- De l'arbre, on lit :  $\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(N) = \frac{2}{75} + \frac{7}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{23}{75}$ .
- Le calcul porte essentiellement sur  $\mathbb{P}(B \cap D)$ , qu'on déduit de l'arbre grâce à  $\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2)$ .

**EXERCICE 2.**

(Enseignement obligatoire)

On considère le polynôme  $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$ , où  $z$  est un nombre complexe.

1. On cherche ici deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260 = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20) \quad (1)$$

Développons, on a :

$$(z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20) = z^4 + (4+a)z^3 + (20+4a+b)z^2 + (20a+4b)z + 20b$$

Ainsi :

$$(1) \iff \begin{cases} 4 + a = 0 \\ 20 + 4a + b = 17 \\ 20a + 4b = -28 \\ 20b = 260 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ 20 + 4 \times (-4) + b = 17 \\ 20 \times (-4) + 4 \times b = -28 \\ b = 13 \end{cases}$$

Les seules valeurs possibles sont donc  $a = -4$  et  $b = 13$ . En conclusion :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260 = (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20)$$

2. D'après ce qui précède, on a :

$$P(z) = 0 \iff (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) = 0$$

On a donc deux équations à résoudre, notée respectivement :

$$(\mathcal{E}_1) : z^2 - 4z + 13 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}_2) : z^2 + 4z + 20 = 0$$

• **Résolution de l'équation ( $\mathcal{E}_1$ ).** Posons  $a_1 = 1, b_1 = -4$  et  $c_1 = 13$ .

Le discriminant  $\Delta_{(\mathcal{E}_1)}$  vaut :

$$\Delta_{(\mathcal{E}_1)} = b_1^2 - 4a_1c_1 = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36$$

Le discriminant est négatif, donc l'équation ( $\mathcal{E}_1$ ) admet deux solutions complexes et conjuguées :

$$\begin{cases} z_{1.1} = \frac{-b_1 - i\sqrt{|\Delta_{(\mathcal{E}_1)}|}}{2a_1} = \frac{-(-4) - i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i \\ z_{1.2} = \frac{-b_1 + i\sqrt{|\Delta_{(\mathcal{E}_1)}|}}{2a_1} = \frac{-(-4) + i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i \end{cases}$$

• **Résolution de l'équation ( $\mathcal{E}_2$ ).** Posons  $a_2 = 1, b_2 = 4$  et  $c_2 = 20$ .

Le discriminant  $\Delta_{(\mathcal{E}_2)}$  vaut :

$$\Delta_{(\mathcal{E}_2)} = b_2^2 - 4a_2c_2 = 4^2 - 4 \times 1 \times 20 = -64$$

Le discriminant est négatif, donc l'équation ( $\mathcal{E}_2$ ) admet deux solutions complexes et conjuguées :

$$\begin{cases} z_{2.1} = \frac{-b_2 - i\sqrt{|\Delta_{(\mathcal{E}_2)}|}}{2a_2} = \frac{-4 - i\sqrt{64}}{2} = \frac{-4 - 8i}{2} = -2 - 4i \\ z_{2.2} = \frac{-b_2 + i\sqrt{|\Delta_{(\mathcal{E}_2)}|}}{2a_2} = \frac{-4 + i\sqrt{64}}{2} = \frac{-4 + 8i}{2} = -2 + 4i \end{cases}$$

$$\text{Finalement : } P(z) = 0 \iff z \in \{2 - 3i; 2 + 3i; -2 - 4i; -2 + 4i\}$$

3. On place les points sur la figure positionnée en fin d'exercice, puisque complétée au fur et à mesure. Le lien avec les questions y est indiqué.

4. a. On cherche  $z$  tel que  $\frac{z-p}{z-m} = i$ . On a :

$$\frac{z-p}{z-m} = i \iff \begin{cases} z \neq m \\ z-p = i(z-m) \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq m \\ z(1-i) = p-im \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{z-p}{z-m} = i \iff \begin{cases} z \neq m \\ z = \frac{p-im}{1-i} \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq m \\ z = \frac{(p-im)(1+i)}{2} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{z-p}{z-m} = i \iff \begin{cases} z \neq m \\ z = \frac{p+m+i(p-m)}{2} \end{cases}$$

Ainsi, en remplaçant  $m$  et  $p$  par leur écriture algébrique, on obtient :

$$z = \frac{2+3i+4i-2+i(2+3i+2-4i)}{2} = \frac{7i+4i+1}{2} = \frac{1+11i}{2}$$

$$\text{On a bien } z \neq m, \text{ donc } \frac{z-p}{z-m} = i \iff z = \frac{1}{2} + \frac{11}{2}i$$

b. Notons  $k$  l'affixe du point  $K$ . On a donc, d'après ce qui précède :

$$\frac{k - p}{k - m} = i \tag{2}$$

Montrons que  $MPK$  est isocèle rectangle :

- **MPK isocèle.** Prenons les modules de l'ensemble de cette égalité. Par propriété des modules, on obtient :

$$\left| \frac{k - p}{k - m} \right| = |i| \iff \frac{|k - p|}{|k - m|} = 1 \iff \frac{PK}{MK} = 1$$

Autrement écrit, on a donc  $PK = MK$ , le triangle  $MPK$  est donc isocèle en  $K$ .

- **MPK rectangle.** Prenons maintenant les arguments de l'ensemble de l'égalité (2). Par propriété des arguments, on obtient :

$$\arg\left(\frac{k - p}{k - m}\right) = \arg(i) \iff (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{PK}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Autrement écrit, on a donc :  $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KP}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Le triangle  $MPK$  est donc rectangle en  $K$ .

En conclusion, on a montré que  $MPK$  est rectangle et isocèle en  $K$ .

5. a. Pour déterminer l'affixe du point  $L$ , il faut que  $MKPL$  soit un carré et donc que  $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{KP}$ . Autrement écrit, en notant  $\ell$  l'affixe du point  $L$  :

$$\ell - m = p - k \iff \ell = m + p - k$$

Ainsi :  $\ell = -2 + 4i + 2 + 3i - \frac{1}{2} - \frac{11}{2}i$ . D'où :

$$\ell = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

- b. Soit  $x$  l'abscisse du point  $R$ . Dès lors  $R\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ , puisque  $R$  est le point de la droite  $(KL)$  qui intercepte l'axe des abscisses.

Les points  $K, L$  et  $R$  sont donc alignés et les vecteurs  $\overrightarrow{KL}$  et  $\overrightarrow{KR}$  sont colinéaires. On a donc :

$$\det(\overrightarrow{KL}; \overrightarrow{KR}) = 0$$

À partir des coordonnées de  $K, L$  et  $R$ , on a :

$$\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KR} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\det(\overrightarrow{KL}; \overrightarrow{KR}) = 0 \iff \frac{11}{2} + 4\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

On trouve alors  $x = -\frac{7}{8}$ , d'où  $R\left(-\frac{7}{8}; 0\right)$ .

- c. D'une part, les points  $P$  et  $Q$  ont des affixes conjuguées de même que  $M$  et  $N$  puisqu'on a :

$$p = \bar{q} \quad \text{et} \quad m = \bar{n}$$

Géométriquement, cela signifie que l'axe des abscisses est la médiatrice à la fois du segment  $[PQ]$  et du segment  $[MN]$ . D'après la définition du point  $R$ , se trouvant sur l'axe des abscisses, on en tire  $RP = RQ$  et  $RM = RN$ .

Par ailleurs  $R \in (KL)$  et  $(KL)$  est l'une des deux diagonales du carré  $MKPL$ . C'est donc la médiatrice du segment  $[MP]$ . On en déduit donc  $RM = RP$ .

Par transitivités des égalités  $RQ = RP = RM = RN$ . On en conclut que les points  $M, N, P$  et  $Q$  appartiennent à un même cercle de centre  $R$  (voir figure ci-après).

**Complément** : on peut calculer le rayon de ce cercle en calculant par exemple la distance  $RP$ . On a :

$$\overrightarrow{RP} \begin{pmatrix} x_P - x_R \\ y_P - y_R \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{RP} \begin{pmatrix} \frac{23}{8} \\ 3 \end{pmatrix}$$



b. Soit  $M \notin (D)$ , c'est-à-dire  $z' \neq 1$  et  $z \neq i$ . On a :

$$\frac{z' - 1}{z - i} = \frac{\frac{z - i}{\bar{z} + i} - \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} + i}}{z - i} = \frac{z - i - \bar{z} - i}{(z - i)(\bar{z} + i)} = \frac{(z - \bar{z}) - 2i}{z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + 1}$$

Or, par propriété  $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$ . On a donc :

$$\frac{z' - 1}{z - i} = \frac{2i\Im(z) - 2i}{z\bar{z} + 2i^2\Im(z) + 1} = \frac{2i(\Im(z) - 1)}{z\bar{z} - \Im(z) + 1}$$

Sur la même base que le raisonnement en question précédente, on peut écrire que  $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ . De plus, par définition,  $\Im(z) \in \mathbb{R}$ .

Ainsi, en posant  $k = \frac{2(\Im(z) - 1)}{z\bar{z} - \Im(z) + 1}$ , on a bien  $k \in \mathbb{R}$  et :

$$\frac{z' - 1}{z - i} = ki \iff \boxed{\frac{z' - 1}{z - i} \in i\mathbb{R}}$$

On remarque que :

$$\frac{z' - 1}{z - i} = \frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_B} = \frac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}$$

C'est-à-dire  $\frac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} \in i\mathbb{R}$ . Or, par propriété :

$$\frac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} \in i\mathbb{R} \iff \overrightarrow{AM'} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont orthogonaux}$$

Ainsi, les droites  $(AM')$  et  $(BM)$  sont perpendiculaires.

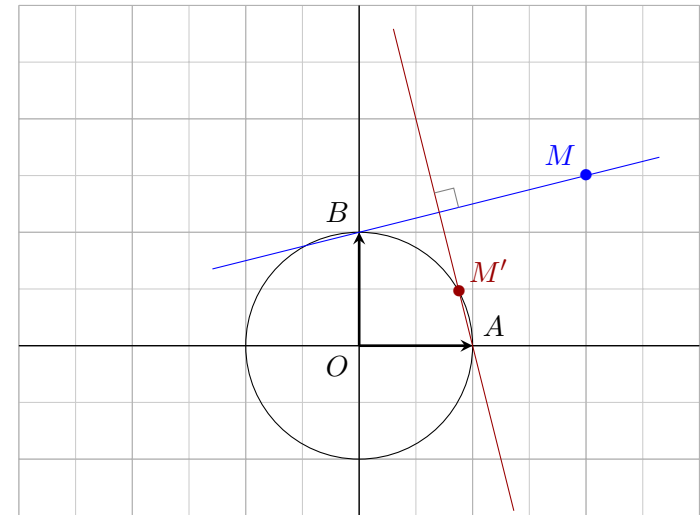
c. On considère  $M \notin (D)$ , donc,  $M \neq B$ . Dès lors :

- D'après la question 2.a.,  $M' \in (C)$ .
- D'après la question 2.b.,  $(AM') \perp (BM)$ .

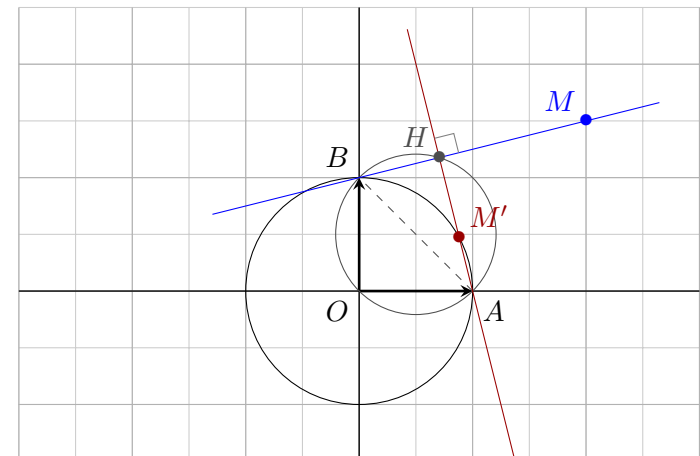
**1<sup>re</sup> méthode.** Pour trouver  $M'$  par construction, il suffit donc de tracer le cercle  $(C)$ , puis la droite  $(BM)$ . Ensuite, il faut tracer la perpendiculaire à  $(BM)$  passant par  $A$ . L'intersection de cette dernière droite avec le cercle  $(C)$  est donc le point  $M'$ .

Lorsque  $M \in (D) / B$ , alors  $z' = 1$ , donc  $M' = A$ .

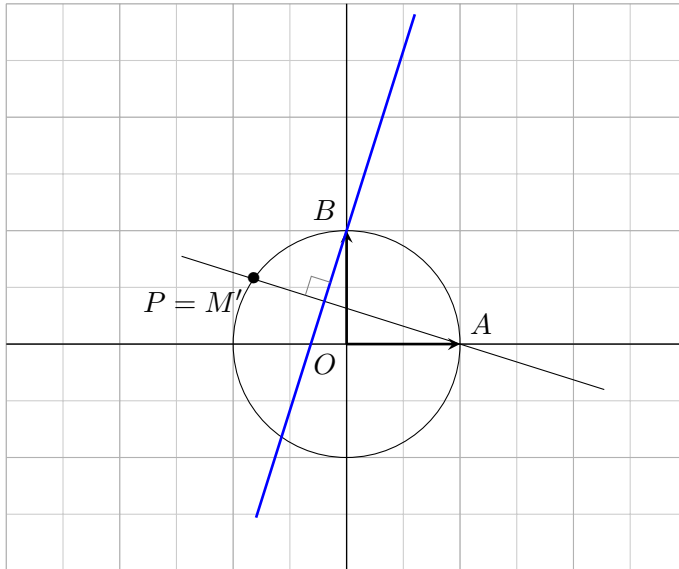
On illustre, à titre d'exemple, la construction ci-dessous :



**2<sup>e</sup> méthode.** Un tracé à l'équerre n'est pas forcément très précis. Comme  $(BM)$  et  $(AM')$  sont perpendiculaires, notons  $H$  leur point d'intersection. Le triangle  $ABH$  est donc rectangle en  $H$ . Pour trouver  $M'$  par construction, il suffit de tracer le cercle de diamètre  $[AB]$ , on obtient  $H$ , qui est l'intersection de ce cercle avec  $(BM)$ . On trace enfin la droite  $(AH)$  pour obtenir  $M'$ , intersection de  $(AH)$  avec le cercle  $(C)$ .



3. a. Soit  $P \in (C) / A$ . On trace la droite  $(AM') = (AP)$ . La droite perpendiculaire à  $(AM') = (AP)$  passant par  $B$  est l'ensemble  $E$  cherché.



b. Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 1$ . Notons  $\omega_k$  les solutions de cette équation. Par théorème :

$$\exists k \in \llbracket 0 ; 2 \rrbracket, \omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \iff \exists k \in \llbracket 0 ; 2 \rrbracket, \omega_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^k$$

Ainsi, les solutions de cette équation s'écrivent :

- $\omega_0 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^0 = 1$ .
- $\omega_1 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ .
- $\omega_2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2$

Finalement  $\boxed{\mathbb{U}_3 = \{1 ; j ; j^2\}}$ .

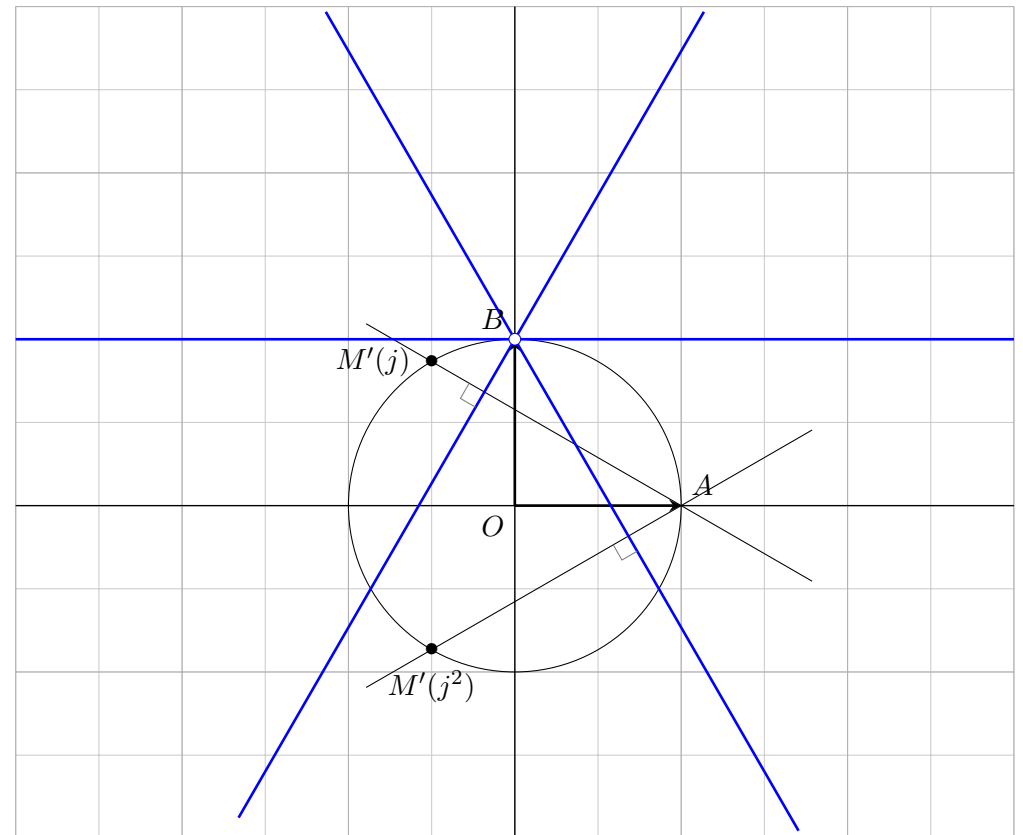
c. L'équation proposée se réécrit :

$$\left(\frac{z-i}{\bar{z}+i}\right)^3 = 1 \iff z^3 = 1$$

D'après ce qui précède, on a 3 solutions pour  $z'$  :

- Pour  $z' = 1$ , alors  $M' = A$  et  $M \in (D) / B$  (voir 2.c.).
- Pour  $z' = j$ ,  $M' \in (C)$ , on déduit l'ensemble des points  $M$  associés grâce à la question 3.a..
- De même, pour  $z' = j^2$ ,  $M' \in (C)$  et la construction géométrique présentée en question 3.a. permet d'obtenir l'ensemble des points  $M$ .

On déduit l'ensemble  $F$  cherché, en bleu sur la représentation ci-contre. Il s'agit de la réunion des 3 droites ainsi construites.



**PROBLÈME.** (Enseignement obligatoire et de spécialité)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

**Partie A : étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $I$  par  $g(x) = x + 2 - e^x$ .

1.  $g$  est dérivable sur  $I$  en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur  $I$ . Ainsi :

$$\forall x \in I, g'(x) = 1 - e^x$$

De plus, sur  $I$ ,  $x \geq 0$ , donc, comme la fonction  $x \mapsto e^x$  est strictement croissante sur  $I$ , alors :

$$x \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff g'(x) \leq 0$$

On déduit donc que  $g$  est strictement décroissante sur  $I$ .

De plus, on peut écrire :

$$\forall x \in I, g(x) = x \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et, par croissance comparée } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty.$$

Donc, par somme :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$ . Finalement, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

2. a. On se place sur  $I$ . Raisonnons par étapes :

- $g$  est dérivable sur  $I$  donc continue sur  $I$ .
- $g$  est strictement décroissante sur  $I$  (d'après la question précédente).

- De plus, on a :

$$g(I) = g([0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0) \right] = ] -\infty; 1]$$

Donc  $0 \in g(I)$ .

- **Conclusion** : d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc conclure que l'équation

$$g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } I.$$

- b. Par itérations successives, on trouve avec un pas de 0,01 :

$$\begin{cases} g(1,14) \approx 0,013 > 0 \\ g(1,15) \approx -0,008 < 0 \end{cases}$$

Donc  $1,14 < \alpha < 1,15$ .

3. Pour conclure sur le signe, il suffit de se servir de la stricte décroissance de  $g$  :

$$\begin{cases} \bullet \forall x \in [0; \alpha], g(x) \geq 0. \\ \bullet \forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) \leq 0. \end{cases}$$

**Partie B : étude de la fonction  $f$  et tracé de la courbe  $\mathcal{C}$** 

1. a. Soit  $x \in I$ .  $f$  est dérivable sur  $I$  en tant que somme et quotient de fonctions usuelles dérivables sur  $I$ . Posons :

$$\begin{cases} t(x) = e^x - 1 \\ p(x) = xe^x + 1 \end{cases}$$

$t$  et  $p$  sont dérivables sur  $I$ , donc :

$$\begin{cases} t'(x) = e^x \\ p'(x) = (x+1)e^x \end{cases}$$

Ainsi, d'après les formules de dérivation, il vient :

$$f'(x) = \frac{t'(x)p(x) - t(x)p'(x)}{(p(x))^2} = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x - 1)(x+1)e^x}{(xe^x + 1)^2}$$

Ou encore, en mettant  $e^x$  en facteur :

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1 - xe^x - e^x + x + 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2}$$

On en déduit donc :  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b. On a clairement  $\forall x \in I, e^x > 0$  et  $(xe^x + 1)^2 > 0$ . Donc le signe de  $f'(x)$  ne dépend que du signe de  $g(x)$ . D'après la question **A3.**, on connaît le signe de  $g$  par rapport à  $\alpha$ . On peut donc écrire :

- $f$  est croissante sur  $[0; \alpha]$ .
- $f$  est décroissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .

2. a. Soit  $x \in I$ . On a :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(x + \frac{1}{e^x}\right)}$$

Comme  $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ , on déduit :  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty$$

Donc, par quotient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$f$  admet donc l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en  $+\infty$ .

3. a. D'après la question **A2.a.**,  $g(\alpha) = 0$ , autrement dit :

$$\alpha + 2 - e^\alpha = 0 \iff e^\alpha = \alpha + 2$$

De plus :

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$$

Comme  $\alpha \neq -1$ , on peut donc simplifier par  $\alpha + 1$  et on obtient :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$$

b. D'après la question **A2.b.**, on a :

$$1,14 < \alpha < 1,15 \iff 2,14 < \alpha + 1 < 2,15 \iff \frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14}$$

D'où finalement  $0,46 < f(\alpha) < 0,47$

4. Soit  $x \in I$ .  $(T)$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0. Une équation de cette tangente s'écrit alors :

$$(T) : y(x) = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\text{Or } f'(0) = \frac{e^0 g(0)}{(0 \times e^0 + 1)^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \text{ et } f(0) = \frac{e^0 - 1}{0 \times e^0 + 1} = 0. \text{ D'où :}$$

$$(T) : y(x) = x$$

5. a. Soit  $x \in I$ . On a :

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - \frac{x^2 e^x + x}{xe^x + 1} = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1}$$

L'astuce est d'ajouter et de soustraire la quantité  $xe^x$  :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{xe^x - xe^x + e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{x(e^x - xe^x - 1) + e^x - 1 - xe^x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(x + 1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

D'où  $f(x) - x = \frac{(x + 1)u(x)}{xe^x + 1}$  avec  $u(x) = e^x - xe^x - 1$ .

b. Soit  $x \in I$ . Réécrivons  $u(x)$  :

$$u(x) = e^x(1 - x) - 1$$

$u$  est dérivable sur  $I$  en tant que somme et produit de fonctions usuelles dérivables sur  $I$ . Posons :

$$\begin{cases} h(x) = e^x \\ k(x) = 1 - x \end{cases}$$

$h$  et  $k$  sont dérivables sur  $I$ , donc :

$$\begin{cases} h'(x) = e^x \\ k'(x) = -1 \end{cases}$$

Ainsi, d'après les formules de dérivation, il vient :

$$u'(x) = h'(x)k(x) + h(x)k'(x) - 0 = e^x(1 - x) - e^x = e^x(1 - x - 1)$$

D'où  $\forall x \in I$ ,  $u'(x) = -xe^x$ . Comme  $x \geq 0$ , on déduit aisément que  $u'(x) \leq 0$  sur  $I$ .

Ainsi,  $u$  est décroissante sur  $I$ . De plus, on remarque que :

$$u(0) = e^0(1 - 0) - 1 = 1 \times 1 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Comme  $u$  est décroissante sur  $I$ , on déduit que  $u(x) \leq 0$  sur  $I$ .

c. De l'expression obtenue en question **B5.a.**, on peut déduire que le signe ne dépend que de celui de  $u$  puisque  $x \in I$  et que nécessairement :

$$x + 1 > 0 \quad \text{et} \quad xe^x + 1 > 0$$

Or, d'après ce qui précède,  $\forall x \in I$ ,  $u(x) \leq 0$ , donc  $f(x) - x \leq 0$  pour tout  $x$  élément de  $I$ . Autrement dit :

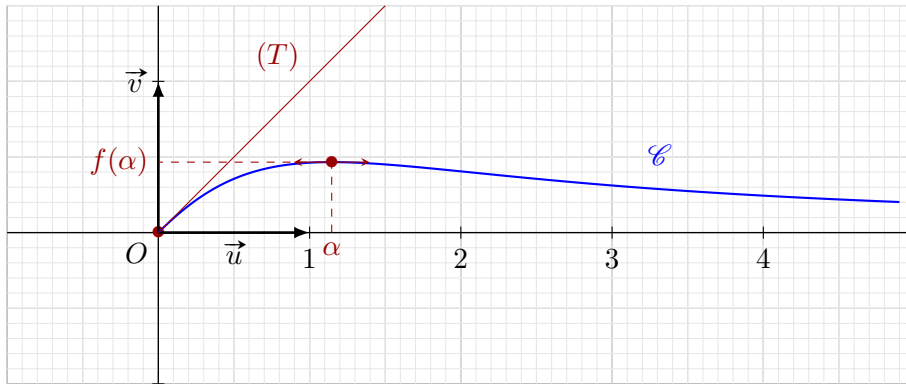
$$\forall x \in I, f(x) \leq x$$

De cette inégalité, on déduit que  $\mathcal{C}$  est en-dessous de  $(T)$ .

6. Pour construire la courbe représentative de  $f$ , exploitons les résultats obtenus :

- $f'$  s'annule en  $\alpha$ . Donc  $\mathcal{C}$  admet une tangente horizontale au point d'abscisse  $\alpha$ .
- En  $x = 0$ , on trace la tangente d'équation  $y = x$ .

On obtient donc la courbe ci-contre.



**Partie C : calcul d'aire et étude d'une suite**

1.  $f$  est continue sur  $I$ , donc  $f$  admet bien des primitives sur  $I$ . D'après la question **B2.a.**, on a :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

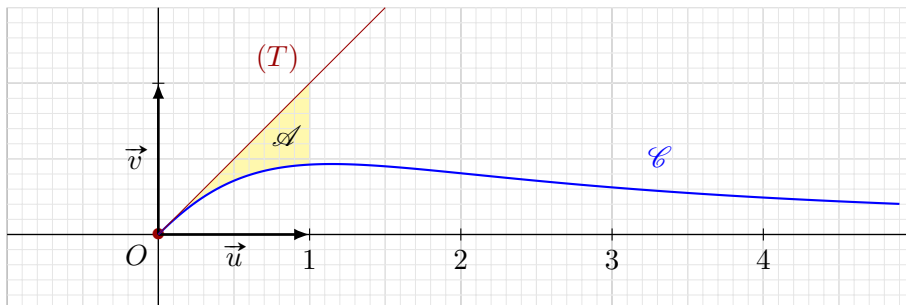
On pose  $v(x) = x + e^{-x}$ .  $v$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée vaut :

$$\forall x \in I, v'(x) = 1 - e^{-x}$$

Ainsi, on peut écrire que  $f = \frac{v'}{v}$ . Comme  $v(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$ , alors une primitive  $F$  de  $f$  s'écrit :

$$\forall x \in I, F(x) = \ln(v(x)) \iff \boxed{\forall x \in I, F(x) = \ln(x + e^{-x})}$$

2. On représente en jaune l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $\mathcal{D}$  :



D'un point de vue mathématique, on peut écrire cette aire comme suit :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (y(x) - f(x)) \, dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on déduit :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 y(x) \, dx - \int_0^1 f(x) \, dx$$

La droite  $y(x) = x$  permet de calculer l'aire entre 0 et 1, qui vaut  $\frac{1}{2}$ , d'où :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \int_0^1 f(x) \, dx$$

Enfin, d'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = F(1) - F(0)$$

Ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - F(1) + F(0) = \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1}) + \ln(0 + 1)$$

D'où :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1})$ . Or, comme une unité graphique vaut 4 cm, l'aide en  $\text{cm}^2$  vaut alors :

$$\boxed{\mathcal{A} = 16 \left( \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1}) \right) \text{ cm}^2}$$

Au  $\text{mm}^2$  près, on trouve  $\boxed{\mathcal{A} = 2,99 \text{ cm}^2}$ .

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \int_n^{n+1} f(x) \, dx$ .

a. Calculons :

- $v_0 = \int_0^1 f(x) \, dx = F(1) - F(0) = \ln(1 + e^{-1})$ . D'où  $\boxed{v_0 = 0,31}$ .

$$\bullet v_1 = \int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) = \ln(2 + e^{-2}) - \ln(1 + e^{-1}).$$

$$\text{D'où } \boxed{v_1 = 0,45}.$$

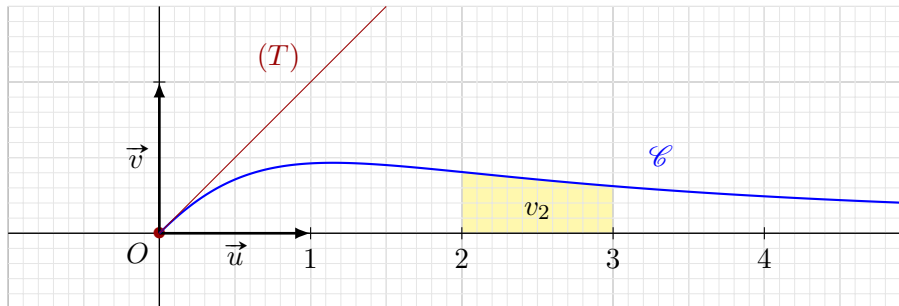
$$\bullet v_2 = \int_2^3 f(x) dx = F(3) - F(2) = \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2}).$$

$$\text{D'où } \boxed{v_2 = 0,36}.$$

b. D'après les résultats obtenus précédemment, on peut déduire que  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Comme  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$  et  $n+1 > n$ , donc :

$v_n$  correspond à l'aire du domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = n$  et  $x = n+1$ .

On représente, en jaune,  $v_2$ , à titre d'exemple :



c. Soit  $n \geq 2$ . Par définition de  $v_n$ , on peut écrire que :

$$n \leq x \leq n+1$$

Or, d'après la question **A2.b.**, on peut déduire que  $2 > \alpha$ . De plus, d'après **B1.b.**, comme  $f$  est décroissante sur  $[\alpha; +\infty[$ , on déduit, pour  $n \geq 2$  :

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

Puis, comme  $n < n+1$ , on peut intégrer membre à membre :

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$f(n)$  et  $f(n+1)$  étant indépendants de  $x$ , on a donc :

$$f(n+1) \int_n^{n+1} 1 dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \int_n^{n+1} 1 dx$$

De plus, aisément :  $\int_n^{n+1} 1 dx = [x]_n^{n+1} = n+1 - n = 1$ . D'où :

$$\forall n \geq 2, f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

Cette relation signifie que  $f(n+1) \leq v_n \leq f(n)$ . On peut donc déduire, au rang  $n+1$  :

$$f(n+2) \leq v_{n+1} \leq f(n+1)$$

En associant ces deux inégalités, il vient :

$$f(n+2) \leq v_{n+1} \leq v_n \leq f(n)$$

On retient en particulier que, pour  $n \geq 2$ ,  $v_{n+1} \leq v_n$ , ce qui signifie que :

$$v_{n+1} - v_n \leq 0$$

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante à partir du rang  $n = 2$ . De plus, d'après la question **C3.a.**, on remarque que  $v_2 \leq v_1$ . Ainsi  $v_{n+1} - v_n \leq 0$  est vérifiée pour  $n = 1$ .

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante à partir du rang  $n = 1$ .

d. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ . De plus, d'après la question **B2.b.** :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 0$$

Ainsi, par composition :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$ .

D'après la question précédente,  $f(n+1) \leq v_n \leq f(n)$ , donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

**Fin du corrigé**