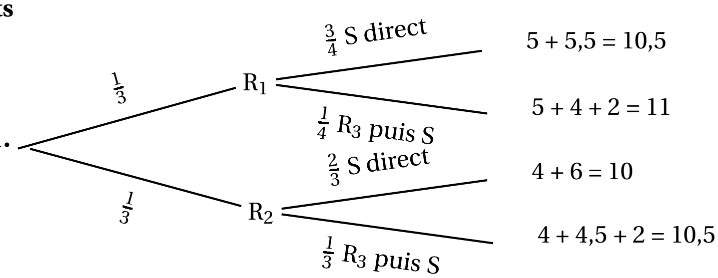
Baccalauréat S Asie juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. $p\left(\mathrm{E}_1\right) = p_{\mathrm{R}_1}\left(\mathrm{R}_3\right) = 1 - p_{\mathrm{R}_1}(\text{S direct}) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

L'évènement E_2 ou R_3 est la réunion des évènements disjoints $\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_1$ et $\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_2$;

$p\left(\mathrm{E}_2\right) = p\left(\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_1\right) + p\left(\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_2\right) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{3+8}{36} = \dfrac{11}{36}$.

$p\left(E_3\right) = p_{\mathrm{R}_3}\left(\mathrm{R}_1\right) = \dfrac{p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_3\right)}{p\left(\mathrm{R}_3\right)} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{3}{11}$.

$p\left(E_4\right) = p_{\text{S direct}}\left(\mathrm{R}_2\right) = \dfrac{p\left(\text{S direct} \cap \mathrm{R}_2\right)}{p(\text{S direct})}$.

Or $p(\text{S direct}) = p(\text{S direct} \cap \mathrm{R}_1) + p(\text{S direct} \cap \mathrm{R}_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{16+9}{36} = \dfrac{25}{36}$.

Donc $p\left(E_4\right) = \dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{25}{36}} = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{36}{25} = \dfrac{16}{25}$.

3. **a.** On a $p(X = 10) = p\left(\mathrm{R}_2 \cap \text{S direct}\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

$p(X = 11) = p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_3\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$.

$p(X = 10,5) = p\left(\mathrm{R}_1 \cap \text{S direct}\right) + p\left(\mathrm{R}_2 \cap \mathrm{R}_3\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{17}{36}$.

b. $E(X) = 10 \times \dfrac{4}{9} + 11 \times \dfrac{1}{12} + 10,5 \times \dfrac{17}{36} = \dfrac{371,5}{36} \approx 10,3194\ldots$ soit 10,32 au centième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$z' = \frac{-\mathrm{i}z - 2}{z+1}.$$

1. On a $c' = \dfrac{-\mathrm{i}(-\mathrm{i}) - 2}{-\mathrm{i} + 1} = \dfrac{-3}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{-3(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{-3(1+\mathrm{i})}{2} = -\dfrac{3}{2}(1+\mathrm{i})$.

D'où $\left|c'\right|^2 = \dfrac{9}{4}(1+1) = \dfrac{18}{4}$, donc $\left|c'\right| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

En factorisant ce module on peut donc écrire :

$c' = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos -\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin -\frac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

2. Il faut résoudre l'équation :
$\dfrac{-\text{i}z-2}{z+1} = \dfrac{1}{2} \iff 2(-\text{i}z-2) = z+1 \iff z(1+2\text{i}) = -4-1 \iff z = \dfrac{-5}{1+2\text{i}} \iff z = \dfrac{-5(1-2\text{i})}{(1+2\text{i})(1-2\text{i})} \iff$
$z = \dfrac{5(-1+2\text{i})}{1+4} = -1+2\text{i}$

3. **a.** $z' = \dfrac{-\text{i}z-2}{z+1} \Rightarrow z'+\text{i} = \dfrac{-\text{i}z-2}{z+1} + \text{i} \iff z'+\text{i} = \dfrac{-\text{i}z-2+\text{i}z+\text{i}}{z+1} \iff$
$\left(z'+\text{i}\right)(z+1) = -2+\text{i}$.
On en déduit en prenant les modules des deux membres :
$pp' = |-2+\text{i}| = \sqrt{5}$.

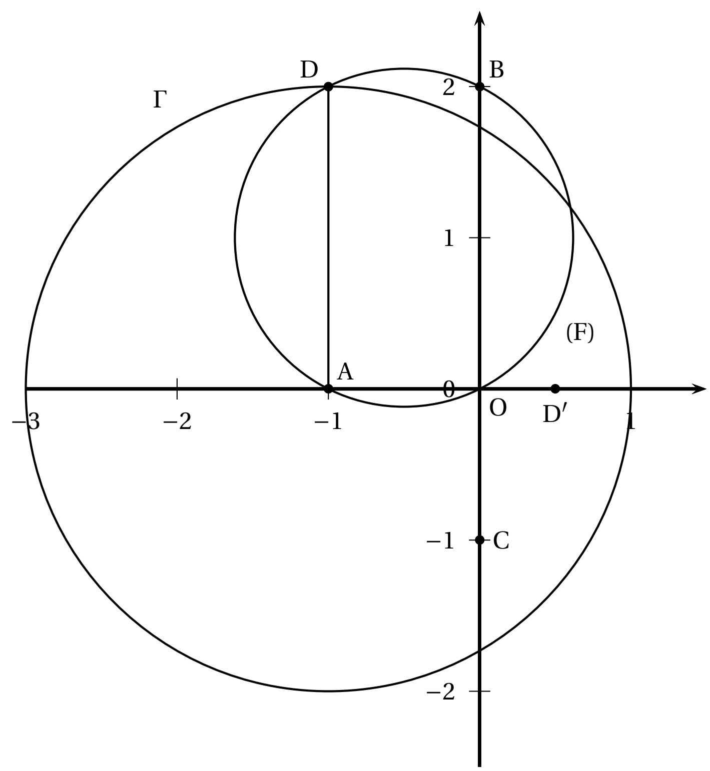
b. Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, alors
$\text{A}M = 2 \iff |z-(-1)| = 2 \iff |z+1| = 2 \iff p = 2$.
Du résultat précédent on en déduit que $p' = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = |z'+\text{i}| = \text{C}M'$: ceci signifie que l'image d'un point du cercle de centre A et de rayon 2, est un point du cercle de centre C et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

4. **a.** $\omega =$

Conclusion : les points M appartiennent au cercle (F) de diamètre [AB] privé des points A et B.

b. A a pour affixe -1 et D a pour affixe $-1+2\text{i}$, donc AD = 2 ; D appartient au cercle (Γ).
Comme OADB est un rectangle , D appartient au cercle (F) de diamètre [AB].

5.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$

a. $(f \circ f)(z) = f[f(z)] = f\left(\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}\right) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \overline{\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}} =$
$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times z = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)z = z.$

b. On voit que : $z \longmapsto S(z) = \overline{z} \longmapsto R[S(z)] = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = f(z).$

R est la symétrie autour de l'axe des abscisses.

Ensuite on a vu à la question 1. que $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 = \left|\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2.$

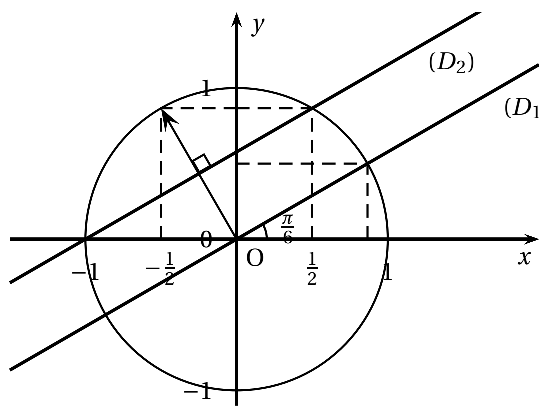
$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est donc un complexe de module 1 ; on peut l'écrire
$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$

On reconnaît dans R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Ob a donc $f = R \circ S$.

c. R est la composée de la symétrie S autour de l'axe des abscisses et de la symétrie d'axe D_1, cet axe contenant O et faisant un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec l'axe des abscisses.

On a donc $f = R \circ S = S \circ S = S_{D_1} \circ S \circ S = S_{D_1}$.



$$z'' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. a. z est invariant par g si et seulement si :

$z = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x + \mathrm{i}y = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - \mathrm{i}y) - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \\ y & = & -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x & = & +\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}y & = & \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{3}y - 1 \\ 3y & = & \sqrt{3}x + \sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{3}y - 1 \\ \sqrt{3}y & = & x + 1 \end{array}\right. \Rightarrow x = x + 1 - 1.$

On a donc $x - y\sqrt{3} + 1 = 0$: c'est l'équation d'une droite.

b. On voit que g est la composée de f et de la translation T définie par

$z \longmapsto z - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$g = T \circ f$ où T est la translation de vecteur $\overrightarrow{t}$ d'affixe $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. On a $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{t}\right) = \arg\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\overrightarrow{t}$ est donc normal à un vecteur directeur de (D_1) : T est la composée de la symétrie axiale S_{D_1} et de la symétrie axiale S_{D_2} où (D_2) est la parallèle à (D_1) contenant le point du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$. Donc :

$g = T \circ f = \left(S_{\mathrm{D}_2} \circ S_{\mathrm{D}_1}\right) \circ S_{\mathrm{D}_1} = S_{\mathrm{D}_2} \circ \left(S_{\mathrm{D}_1}\right) \circ S_{\mathrm{D}_1} = S_{\mathrm{D}_2}$.

g est donc la réflexion d'axe (D_2).

d. Si $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est le point de D_2 précédent son image par g est le point d'affixe

$\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le point A est donc invariant par g. La droite (D_2) est la droite contenant A parallèle à (D_1), donc normale à $\overrightarrow{t}$.

PROBLÈME **11 points**

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

⋆ I. Étude de la fonction f et tracé de $(\mathscr{C})$

1. a. On a $(1+x)^2 = 1 + x^2 + 2x = x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2}{x}\right)$, donc pour $x \neq 0$:

$f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2}{x}}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2}{x}} = 1$, donc par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to-1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1} (1+x)^2 = 0_+$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

La droite dont une équation est $x = -1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de -1.

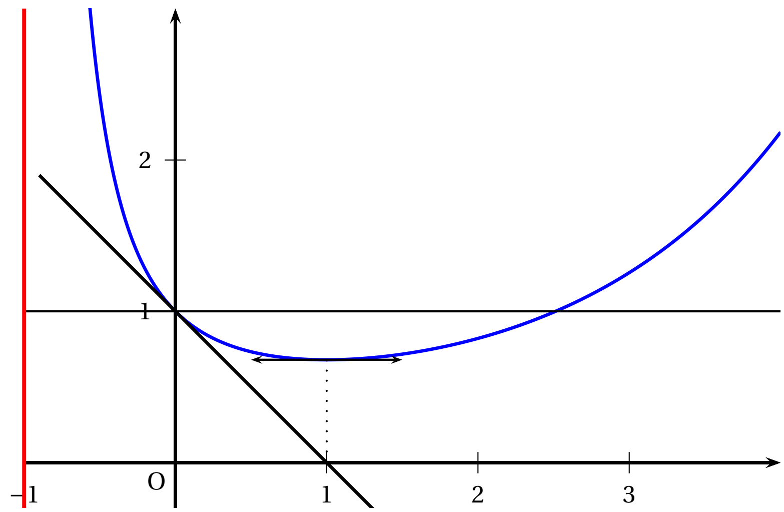
2. f quotient de fonctions dérivables le dénominateur étant non nul est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)^2 - 2(1+x)\mathrm{e}^x}{(1+x)^4} = \dfrac{(1+x)\mathrm{e}^x[1+x-2)}{(1+x)^4} = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x)^3}$.

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit x et que $(1+x)^3 > 0$ pour $x > -1$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

3. D'après le résultat précédent :
$x-1>0 \iff x>1 \implies f'(x)>0$: la fonction est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$;
$x-1<0 \iff x<1 \implies f'(x)<0$: la fonction est décroissante sur $]-1\ ;\ 1[$;
$x-1=0 \iff x=1$: f a un minimum en 1, égal à $f(1)=$

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \iff y-\frac{\mathrm{e}^0}{1^2}=\frac{(0-1)\mathrm{e}^0}{(1+0)^3}(x-0) \iff y-1=-x \iff y=-x+1.$$



4. Sur l'intervalle $[1;10]$, f est strictement croissante ; elle définit une bijection de $[1;10]$ sur $[f(1)\ ;\ f(10)]$. Or $f(1)\approx 0,68<1$ et $f(10)\approx 182>1$, donc l'équation $f(x)=1$ a une solution unique $\alpha \in [1\ ;\ 10]$. D'après la courbe on peut dire que $2<\alpha<3$.

⋆ II. Calcul d'une aire

1. Soit
   a. g est dérivable sur $[1;\ 2]$ et sur cet intervalle :
   $g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)-\mathrm{e}^x\times 1}{(1+x)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x(1+x-1)}{(1+x)^2}=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$.
   Tous les termes étant positifs pour $x>1$, on a donc $g'(x)>0$ sur $[1;\ 2]$: la fonction est strictement croissante de $g(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}\approx 1,359$ à $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}\approx 2,464$.
   b. D'après le résultat précédent on a *a fortiori* : $1<g(x)<2,5$
   c. $1<g(x)<2,5 \implies \displaystyle\int_1^2 1\,\mathrm{d}x<\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x<\int_1^2 2,5\,\mathrm{d}x \iff 2-1<\mathrm{A}_2<2,5(2-1) \iff$
   $1<\mathrm{A}_1<2,5$ en unité d'aire.
2. Sur l'intervalle $[1;2]$, la fonction f est positive donc :
   $\mathrm{A}_2=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.
   En posant $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$, on a :
   $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=-\dfrac{1}{1+x}$.
   Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[1;2]$, on peut donc intégrer par parties :
   $\mathrm{A}_2=\left[-\mathrm{e}^x\times\dfrac{1}{1+x}\right]_1^2+\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{3}+\mathrm{A}_1$.

De l'encadrement précédent de A_1, on déduit :

$1 < A_1 < 2,5 \implies 1 + \dfrac{e}{2} - \dfrac{e^2}{3} < A_1 < 2,5 + \dfrac{e}{2} - \dfrac{e^2}{3}$, soit à peu près :

$-0,1 < A_2 < 1,4$ en unité d'aire.

Cette aire est positive donc en fait $0 < A_2 < 1,4$ en unité d'aire.

⋆ III. Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Soit h la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^3}$.

1. **a.** $f(x) - 2h(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^2} - 2\dfrac{e^x}{(1+x)^3} = \dfrac{e^x(1+x-2)}{(1+x)^3} = \dfrac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = f'(x)$.

   b. La fonction h est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $h'(x) = \dfrac{e^x(1+x)^3 - 3e^x(1+x)^2}{(1+x)^6} = \dfrac{e^x(1+x-3)}{(1+x)^4} = \dfrac{e^x(x-2)}{(1+x)^4}$.

   c. Les fonctions $f'(x)$ et $f(x) - 2h(x)$ étant égales leurs dérivées le sont aussi, d'où :
   $f''(x) = f'(x) - 2h'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{(x+1)^3} - 2\dfrac{e^x(x-2)}{(1+x)^4} =$

Or $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2 \geqslant 2 > 0$ (car somme de deux carrés). On a donc clairement $f''(x) > 0$ sur $]-1\,;\,+\infty[$ donc sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Conclusion f' est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

d. f' croit donc de $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{4\sqrt{e}}{27} \approx -0,25$ à $f(1) = 0$. Donc f' est négative sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ et $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4} = 0,25$.

2. (Question hors-programme en 2002).

   a. Comme $f(\beta) = \beta$ on a pour tout naturel n, $\left|U_{n+1} - \beta\right| = \left|f(U_n) - f(\beta)\right|$.
   Comme U_n etβ appartiennent à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis :
   $\left|U_{n+1} - \beta\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|U_n - \beta\right|$.

   b. • *Initialisation*
   $\left|U_0 - \beta\right| = |1 - \beta| \leqslant 1$ et $\left(\dfrac{1}{4}\right)^0 = 1$: l'inégalité est vraie au rang 0.
   • *Hérédité*
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $\left|U_n - \beta\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   Or $\left|U_{n+1} - \beta\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|U_n - \beta\right|$; donc
   $\left|U_{n+1} - \beta\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et finalement :
   $\left|U_{n+1} - \beta\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle est encore vraie au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence quel que soit le naturel n, $\left|U_n - \beta\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

c. Une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près est U_n lorsque
$\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3}$ soit par croissance du logarithme népérien :
$n \ln \dfrac{1}{4} \leqslant -3\ln 10 \iff n \geqslant \dfrac{-3\ln 10}{\ln \frac{1}{4}} \quad$ car $\ln \dfrac{1}{4} < 0$.
Finalement la calculatrice donne $n \geqslant 4,98$.
Conclusion $U_5 \approx 0{,}697\,14 \approx 0,697$ est une valeur approchée de β à 10^{-3} près.