Corrigé du BTS groupement B2
10 mai 2021 - Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie

Exercice 1 **10 points**

Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage. On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde. On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

A. Résolution d'une équation différentielle

Une étude mécanique montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + 3y' + 2y = 4,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 3r + 2 = 0$,

   $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$; l'équation admet donc 2 solutions

   $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$ et $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-1}{2} = -2$.

   b. Soit (E_0) l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$.

   D'après le cours, on peut dire que l'équation (E_0) admet pour solutions les fonctions définies sur $[0~;~+\infty[$ par $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}$ c'est-à-dire $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t} + \mu \mathrm{e}^{-2t}$.

2. Soit k un nombre réel. On définit la fonction constante g sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = k$.

   La fonction g est solution de (E) si et seulement si $g''(t) + 3g'(t) + 2g(t) = 4$;

   $g(t) = k$ donc $g'(t) = 0$ et $g''(t) = 0$.

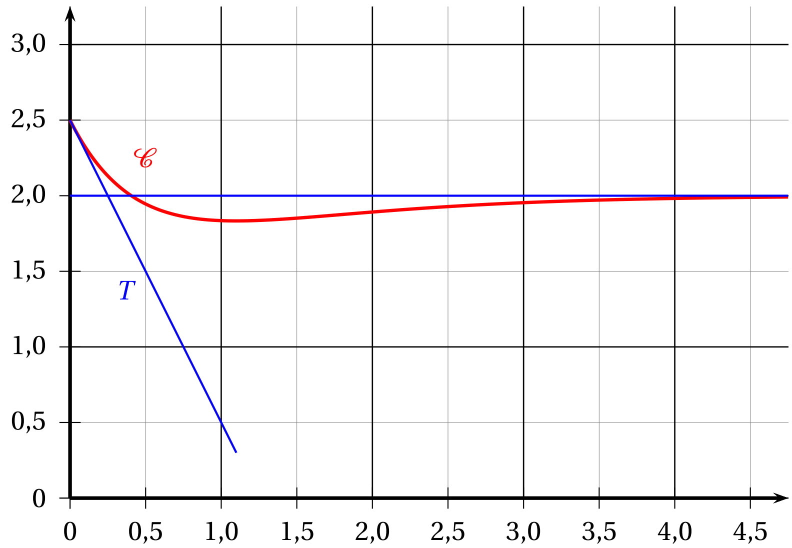
   On arrive à $2k = 4$ donc $k = 2$.

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est donc l'ensemble des fonctions définies par $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t} + \mu \mathrm{e}^{-2t} + 2$.

B. Étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\mathrm{e}^{-2t} + 2$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. La hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$ est $f(0) = -\text{e}^{0} + 1{,}5\,\text{e}^{0} + 2 = 2{,}5$.

2. On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-2t} = 0$.

a. On peut donc en déduire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 2$.

b. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ la droite asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

3. **a.** À l'aide du graphique, on peut dire que la fonction f semble décroissante sur $[0\,;\,1[$ puis croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

b. Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression de la dérivée f' de la fonction f. Ce résultat est admis.

1	$f(t) : -\text{e}^{-t} + 1{,}5\,\text{e}^{-2t} + 2$ $\to f(t) := -\text{e}^{-t} + \dfrac{3}{2}\text{e}^{-2t} + 2$
2	Dérivée$(f(t), t)$ $\to \text{e}^{-t} - 3\,\text{e}^{-2t}$

$$f'(t) = \text{e}^{-t} - 3\,\text{e}^{-2t} = \text{e}^{-2t}\left(\frac{\text{e}^{-t}}{\text{e}^{-2t}} - 3\frac{\text{e}^{-2t}}{\text{e}^{-2t}}\right) = \text{e}^{-2t}\left(\text{e}^{t} - 3\right)$$

c. On résout sur $[0\,;\,+\infty]$ l'inéquation $\text{e}^{t} - 3 \geqslant 0$.

$\text{e}^{t} - 3 \geqslant 0 \iff \text{e}^{t} \geqslant 3 \iff t \geqslant \ln(3)$

d. On détermine le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,+\infty]$.

t	0		$\ln(3)$		$+\infty$
e^{-2t}		$+$		$+$	
$e^{t}-3$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

e. $f(0)=2{,}5$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=2$

$$f(\ln(3)) = -e^{-\ln(3)}+1{,}5\,e^{-2\ln(3)}+2 = -\left(e^{\ln(3)}\right)^{-1}+1{,}5\left(e^{\ln(3)}\right)^{-2}+2$$
$$= -\frac{1}{3}+1{,}5\times\frac{1}{9}+2=\frac{11}{6}\approx 1{,}83$$

On dresse le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty]$.

t	0		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$2{,}5$	$\searrow$	$\approx 1{,}83$	$\nearrow$	2

C. Étude locale

On rappelle que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par $f(t)=-e^{-t}+1{,}5\,e^{-2t}+2$

et que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée dans la partie B.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

3	PolynômeTaylor$(f(t),t,0,2)$
	$\rightarrow \frac{5}{2}-2t+\frac{5}{2}t^2$

1. **a.** Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :

$\frac{5}{2}-2t+\frac{5}{2}t^2$	$\frac{5}{2}-2t+\frac{5}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=0$	$\frac{5}{2}-2t+\frac{5}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

La bonne réponse est : $\frac{5}{2}-2t+\frac{5}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$.

b. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = \dfrac{5}{2}$	$y = \dfrac{5}{2} - 2t$	$y = \dfrac{5}{2} - 2t + \dfrac{5}{2}t^2$

La bonne réponse est : $y = \dfrac{5}{2} - 2t$.

2. Pour étudier la position relative, au voisinage du point d'abscisse 0, de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente T, on étudie le signe de $f(t) - \left(\dfrac{5}{2} - 2t\right)$ au voisinage de 0.

En utilisant de développement limité de f au voisinage de 0, cela revient à étudier le signe de $\left(\dfrac{5}{2} - 2t + \dfrac{5}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)\right) - \left(\dfrac{5}{2} - 2t\right)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

$\left(\dfrac{5}{2} - 2t + \dfrac{5}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)\right) - \left(\dfrac{5}{2} - 2t\right) = \dfrac{5}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t) = t^2\left(\dfrac{5}{2} + \varepsilon(t)\right)$

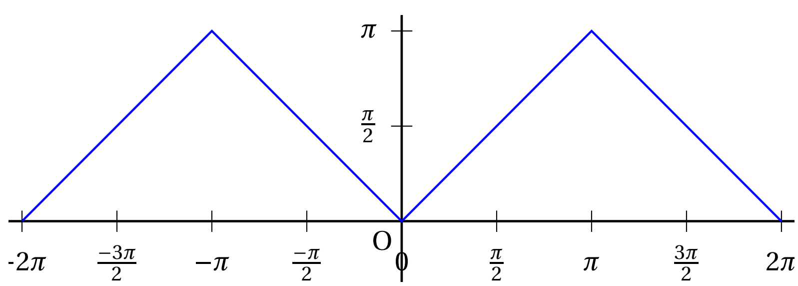
Or $\varepsilon(t)$ tend vers 0, donc pour t proche de 0, on aura $\dfrac{5}{2} + \varepsilon(t) > 0$ donc $t^2\left(\dfrac{5}{2} + \varepsilon(t)\right) > 0$; au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathcal{C}$ est donc au-dessus de la tangente T.

EXERCICE 2 — 10 points

Soit la fonction f, paire et périodique de période 2π, telle que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, $f(t) = t$.

Cette fonction modélise un signal triangulaire.

1. On trace dans un repère orthonormal, la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,2\pi]$.



2. Soit $s(t) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$ le développement en série de Fourier associé à f.

a. La période T vaut $\dfrac{2\pi}{\omega}$ et dans cet exercice on sait qu'elle vaut 2π ; on en déduit que la pulsation ω est égale à 1.

b. La fonction f est paire donc :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2}$$

c. On sait que si φ est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel α, on a : $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

D'après le texte, la fonction f est paire, et on sait que la fonction sinus est impaire ; donc la fonction $t \longmapsto f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire.

Pour tout α, on a $b_n = \displaystyle\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $\alpha = -\dfrac{T}{2}$, on a : $b_n = \displaystyle\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ et donc $b_n = 0$ pour tout $n > 0$.

d. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient : $a_n = 2\left(\dfrac{\cos(n\pi)}{n^2\pi} - \dfrac{1}{n^2\pi}\right)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

$a_n = 2\left(\dfrac{\cos(n\pi)}{n^2\pi} - \dfrac{1}{n^2\pi}\right)$ et $\omega = 1$ donc :

- $a_1 = 2\left(\dfrac{\cos(1\times\pi)}{1^2\pi} - \dfrac{1}{1^2\pi}\right) = 2\left(\dfrac{-1}{\pi} - \dfrac{1}{\pi}\right) = -\dfrac{4}{\pi}$
- $a_2 = 2\left(\dfrac{\cos(2\times\pi)}{2^2\pi} - \dfrac{1}{2^2\pi}\right) = 2\left(\dfrac{\cos(2\pi)}{4\pi} - \dfrac{1}{4\pi}\right) = 2\left(\dfrac{1}{4\pi} - \dfrac{1}{4\pi}\right) = 0$
- $a_3 = 2\left(\dfrac{\cos(3\times\pi)}{3^2\pi} - \dfrac{1}{3^2\pi}\right) = 2\left(\dfrac{\cos(3\pi)}{9\pi} - \dfrac{1}{9\pi}\right) = 2\left(\dfrac{-1}{9\pi} - \dfrac{1}{9\pi}\right) = -\dfrac{4}{9\pi}$

e. $s_n(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right)$ donc :

- $s_1(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{1}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right) = a_0 + a_1\cos(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(t)$
- $s_3(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{1}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right)$

  $= a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t)$

  $= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos(t) - \dfrac{4}{9\pi}\cos(3t)$

3. On admet que : $s_3(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos(t) - \dfrac{4}{9\pi}\cos(3t)$.

On remplit le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont arrondies à 10^{-2} :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	π
$s_1(t)$	0,30	0,45	0,88	1,48	2,10	2,59	2,83	2,84
$s_3(t)$	0,16	0,44	1,02	1,51	1,96	2,54	2,96	2,99

4. **a.** Soit $F^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t$ la valeur efficace F du signal sur une période.

$f(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t \in [-\pi\,;\,0[\\ t & \text{si } t \in [0\,;\,\pi] \end{cases}$ donc $\left(f(t)\right)^2 = t^2$ sur $[-\pi\,;\,+\pi]$.

Donc $F^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\pi^3}{3} - \dfrac{(-\pi)^3}{3}\right] = \dfrac{1}{2\pi} \times \dfrac{2\pi^3}{3} = \dfrac{\pi^2}{3}$

On en déduit que $F = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

b. On calcule les valeurs efficaces S_1 et S_3 des fonctions s_1 et s_3, puis $\dfrac{S_1}{F}$ et $\dfrac{S_2}{F}$.

- $(S_1)^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}a_1^2 = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4}{\pi}\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{8}{\pi^2}$

  $\dfrac{S_1}{F} = \dfrac{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}}}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \approx 0{,}998\,2$

- $(S_3)^2 = a_0^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{3}\dfrac{a_n^2}{2} = a_0^2 + \dfrac{a_1^2}{2} + \dfrac{a_2^2}{2} + \dfrac{a_3^2}{2} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4}{\pi}\right)^2 + 0 + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4}{9\pi}\right)^2$

  $ = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{8}{\pi^2} + \dfrac{8}{81\pi} = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{648}{81\pi^2} + \dfrac{8}{81\pi} = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{656}{81\pi^2}$

  $\dfrac{S_3}{F} = \dfrac{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{656}{81\pi^2}}}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \approx 0{,}999\,7$

Donc $\dfrac{S_1}{F} < \dfrac{S_3}{F} < 1$.