

☞ Corrigé du BTS Métropole – 14 mai 2024 ☞

Groupement B2

Exercice 1

10 points

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant. On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t .

$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que f est solution de l'équation différentielle : $(E) \quad y' + 0,06y = 2,1$.

1. On résout sur $[0; +\infty[$ l'équation différentielle : $(E_0) \quad y' + 0,06y = 0$.

D'après le cours, on sait que l'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = ke^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle (E_0) a pour solutions les fonctions y définies sur $[0; +\infty[$ par $y(t) = ke^{-0,06t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 35$.

$g'(t) + 0,06g(t) = 0 + 0,06 \times 35 = 2,1$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) .

3. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = ke^{-0,06t} + 35$ où $k \in \mathbb{R}$.

4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle donc $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0 \iff ke^{-0,06 \times 0} + 35 = 0 \iff k + 35 = 0 \iff k = -35$$

Donc la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$.

1. La résistance du béton après 7 jours de séchage est, en MPa :

$$f(7) = -35e^{-0,06 \times 7} + 35 \approx 12,0.$$

72 heures correspondent à 3 jours. Donc la résistance du béton après 72 heures de séchage est, en MPa : $f(3) = -35e^{-0,06 \times 3} + 35 \approx 5,8$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$$\text{Pour tout réel } t \in [0; +\infty[, \text{ on a : } f'(t) = -35 \times (-0,06)e^{-0,06t} + 0 = 2,1e^{-0,06t}.$$

3. Pour tout t de $[0; +\infty[$, $e^{-0,06t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

4. $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,06t = -\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,06t} = 0$

On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 35$.

La résistance du béton va tendre vers 35 MPa.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.

Cette résistance est donc de $f(28)$ soit environ 28,5 MPa.

80 % de 35 correspondent à $0,8 \times 35 = 28$.

Donc l'affirmation du fabricant est juste.

6. On considère la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right) e^{-0,06t} + 35t$.

$$F'(t) = \left(\frac{1750}{3}\right) \times (-0,06) e^{-0,06t} + 35 = -\left(\frac{1750 \times 0,006}{3}\right) e^{-0,06t} + 35$$

$$= -35 e^{-0,06t} + 35 = f(t)$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

7. La valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours est :

$$M = \frac{1}{28-0} \int_0^{28} f(t) dt = \frac{1}{28} [F(t)]_0^{28} = \frac{1}{28} [F(28) - F(0)]$$

$$= \frac{1}{28} \left[\left(\left(\frac{1750}{3}\right) e^{-0,06 \times 28} + 35 \times 28 \right) - \left(\left(\frac{1750}{3}\right) e^{-0,06 \times 0} + 35 \times 0 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{28} \left[\left(\frac{1750}{3}\right) e^{-1,68} + 980 - \frac{1750}{3} \right] \approx 18$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. On complète l'algorithme.

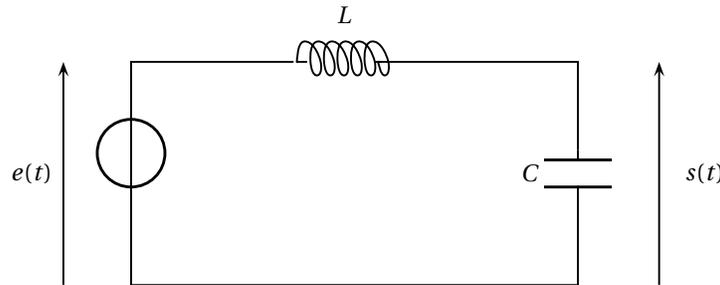
Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que $R < 21$
Ligne 4	$t \leftarrow t + 1$
Ligne 5	$R \leftarrow -35 e^{-0,06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. En utilisant la calculatrice, on trouve : $f(15) \approx 20,8 < 21$ et $f(16) \approx 21,6 > 21$.

Donc le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa est $N = 16$.

Exercice 2

10 points



On considère un circuit LC.

Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.

Le système est régi par l'équation différentielle (E) : $LCs''(t) + s(t) = e(t)$.

Les conditions initiales sont : $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$.

1. On sait que $L = 10$ H et $C = 10^{-5}$ F. L'équation différentielle (E) s'écrit donc :
 $10 \times 10^{-5} \times s''(t) + s(t) = e(t)$ soit $10^{-4} s''(t) + s(t) = e(t)$.

2. On suppose que :

La fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$

La fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle et on utilise sa linéarité.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(10^{-4} s''(t) + s(t)) = \mathcal{L}(e(t)) &\iff 10^{-4} \mathcal{L}(s''(t)) + \mathcal{L}(s(t)) = \mathcal{L}(e(t)) \\ &\iff 10^{-4} (p^2 S(p) - p s(0^+) - s'(0^+)) + S(p) = E(p) \\ &\iff 10^{-4} p^2 S(p) + S(p) = E(p) \iff (10^{-4} p^2 + 1) S(p) = E(p) \end{aligned}$$

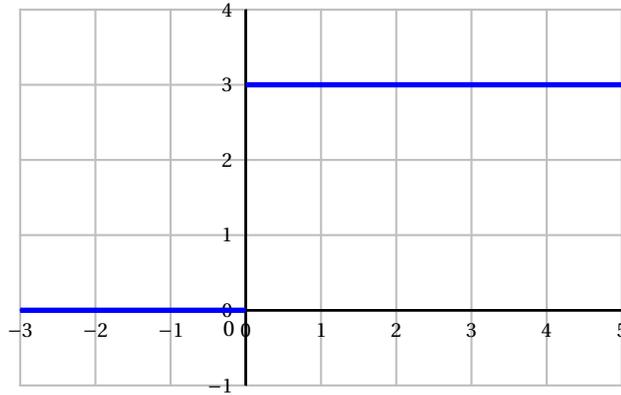
3. La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

$$\text{Donc } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{S(p)}{(10^{-4} p^2 + 1) S(p)} = \frac{1}{10^{-4} p^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{10^4} p^2 + 1} = \frac{10^4}{p^2 + 10^4}$$

4. On note $\mathcal{U}(t)$ la fonction échelon unité définie ainsi : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

On suppose désormais que l'on a : $e(t) = 3\mathcal{U}(t)$.

On représente graphiquement le signal $e(t)$.



5. D'après le formulaire, on peut dire que $E(p) = \frac{3}{p}$.

$$6. (10^{-4}p^2 + 1)S(p) = E(p) \text{ donc } S(p) = \frac{E(p)}{10^{-4}p^2 + 1} = \frac{\frac{3}{p}}{10^{-4}p^2 + 1} = \frac{3}{10^{-4}p^3 + p} = \frac{3 \times 10^4}{p^3 + 10^4 p}$$

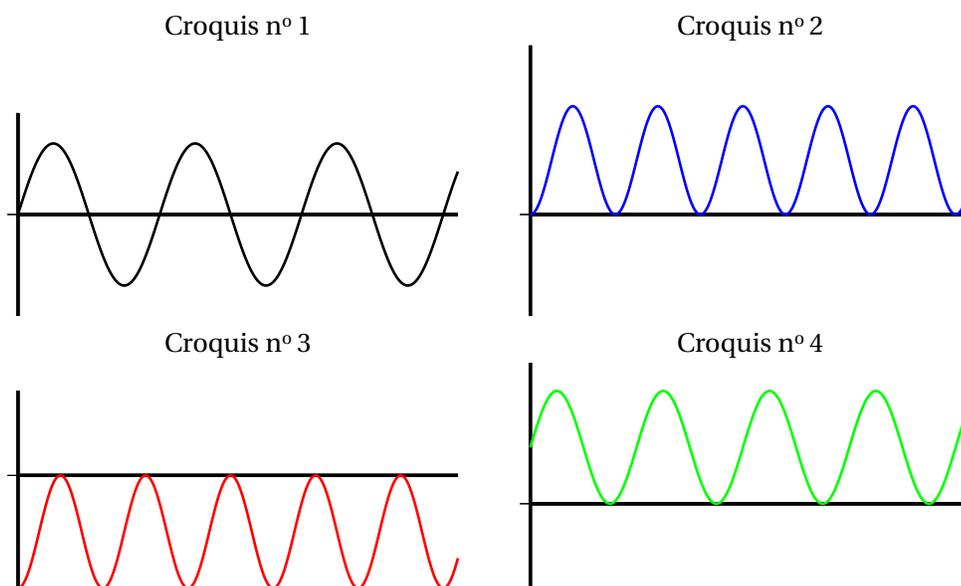
$$\frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4} = \frac{3(p^2 + 10^4)}{p(p^2 + 10^4)} - \frac{3p^2}{p(p^2 + 10^4)} = \frac{3p^2 + 3 \times 10^4 - 3p^2}{p^3 + 10^4 p} = \frac{3 \times 10^4}{p^3 + 10^4 p} = S(p)$$

7. Il s'agit de chercher l'expression dont la transformée de Laplace est $S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4}$.

- Pour obtenir la fonction $p \mapsto \frac{1}{p}$, il faut partir de $t \mapsto \mathcal{U}(t)$, donc pour obtenir la fonction $p \mapsto \frac{3}{p}$, il faut partir de $t \mapsto 3\mathcal{U}(t)$.
- Pour obtenir la fonction $p \mapsto \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, il faut partir de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, donc pour obtenir la fonction $p \mapsto \frac{3p}{p^2 + 10^4}$, il faut partir de $t \mapsto 3 \cos(10^2 t)\mathcal{U}(t)$.

On en déduit que $s(t) = 3\mathcal{U}(t) - 3 \cos(10^2 t)\mathcal{U}(t) = 3\mathcal{U}(t) [1 - \cos(100t)]$.

8. On considère les 4 croquis ci-dessous.



Le croquis représentant la courbe de $s(t)$ est le croquis 2.

En effet :

- Pour $t = 0$ on a $\cos(100t) = \cos(0) = 1$ donc $s(0) = 0$.
On peut donc éliminer les croquis 3 et 4.
- $-1 \leq \cos(100t) \leq 1$ donc $1 - \cos(100t) \geq 0$ et donc $s(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.
On peut donc éliminer le croquis 1.