∽ Corrigé du BTS Métropole – mai 2022 ∾
Groupement B2

Exercice 1 **10 points**

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de 20 m.s^{-1} sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage. On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage. On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t. $f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et t est exprimé en seconde.
L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.
On suppose que f est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle : (E) : $\quad y' + 0{,}8y = 4$,
où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

1. **a.** L'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = k\,\text{e}^{-at}$ où k est un réel quelconque.

   Donc l'équation différentielle $y' + 0{,}8y = 0$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = k\,\text{e}^{-0{,}8t}$ où k est un réel quelconque.

   b. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 5$.

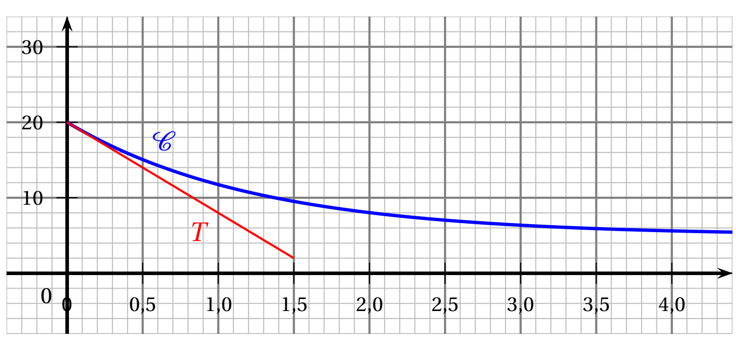
   $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

   c. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions f définies par $f(t) = k\,\text{e}^{-0{,}8t} + 5$, où k est un réel.

2. $f(0) = 20$ donc $k\,\text{e}^{0} + 5 = 20$ donc $k = 15$.
   La solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 20$ est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 15\,\text{e}^{-0{,}8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$; or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0{,}8t = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}8t} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 5$.

b. On peut donc dire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 5$.

2. On admet que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ on a : $f'(t) = -12\,\mathrm{e}^{-0{,}8t}$.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc pour tout t, $\mathrm{e}^{-0{,}8t} > 0$ donc $f'(t) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

$f(0) = 20$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} = 5$

On dresse le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	5

3. La vitesse limite est de 5 m/s donc le système de freinage ne permet pas au chariot de s'arrêter.

4. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5t$.

a. $F'(t) = -18{,}75 \times (-0{,}8)\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5 = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. On admet que la distance d, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants t_0 et t_1 est donnée par : $d = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ est donc en mètre :

$$\begin{aligned} d = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_0^1 &= F(1) - F(0)\\ &= \left(-18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8\times1} + 5\times1\right) - \left(-18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8\times0} + 5\times0\right)\\ &= -18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8} + 5 + 18{,}75\,\mathrm{e}^{0} + 0 = 23{,}75 - 18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8} \approx 15{,}33 \end{aligned}$$

Partie C – Étude locale

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0.

1	PolynômeTaylor($f(t)$,t,0,2) $\leftarrow 20 - 12t + \dfrac{24}{5}t^2$

1. Cette question est une question à choix multiple.

   Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :

$20 - 12t + \dfrac{24}{5}t^2 + \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$	$20 + \dfrac{24}{5}t^2$	$20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

   La bonne réponse est la 3e : $20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

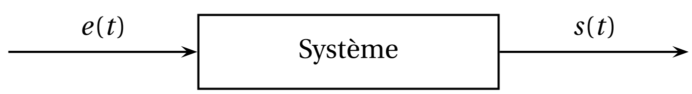
2. D'après le développement limité, une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 20 - 12t$ (voir graphique).

Exercice 2 **10 points**

La fonction échelon unité $\mathscr{U}$ est définie par $\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$.

On considère le système électrique entrée-sortie schématisé ci-dessous.

On note $s(t)$ le signal de sortie associé au signal d'entrée $e(t)$.



Les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ admettent des transformées de Laplace notées respectivement $E(p)$ et $S(p)$.

La fonction de transfert $H(p)$ du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

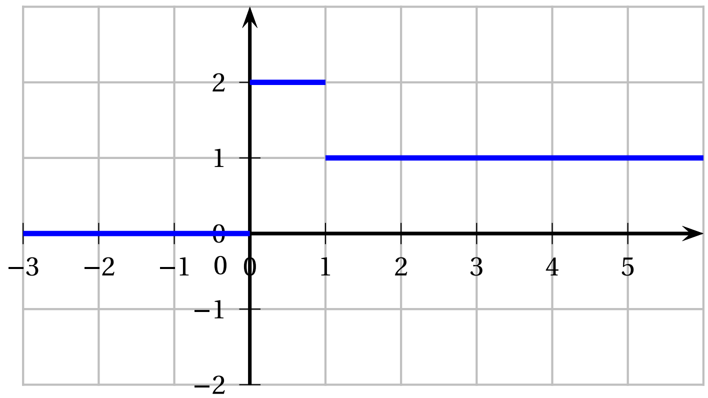
On a $e(t) = 2\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)$ et $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

Partie A - signal d'entrée

1. On détermine l'expression de la fonction $e(t)$.

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\mathscr{U}(t)$		0	1	1	1	1	
$2\mathscr{U}(t)$		0	2	2	2	2	
$\mathscr{U}(t-1)$		0	0	0	1	1	
$e(t) = 2\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)$		0	2	2	1	1	

On trace la représentation graphique de la fonction e.



2. $e(t) = 2\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$ donc, en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace,

$E(p) = \mathcal{L}\left(e(t)\right) = \mathcal{L}\left(2\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right) = 2\mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t)\right) - \mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t-1)\right) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-p}$

Partie B - signal de sortie

1. $S(p) = H(p) \times E(p) = \dfrac{1}{p+1}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-p}\right) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \left(\dfrac{1}{p(p+1)}\right)\mathrm{e}^{-p}$

2. $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p+1}{p\left(p+1\right)} - \dfrac{p}{p\left(p+1\right)} = \dfrac{p+1-p}{p\left(p+1\right)} = \dfrac{1}{p\left(p+1\right)}$

3. D'après le formulaire, on a :

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right) = \mathcal{U}(t)$ $\qquad$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\right) = \mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\cdot\mathrm{e}^{-p}\right) = \mathcal{U}(t-1)$ $\qquad$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\cdot\mathrm{e}^{-p}\right) = \mathrm{e}^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$

4. D'après les questions 1 et 2, on a :

$$\begin{aligned} S(p) &= \dfrac{2}{p(p+1)} - \left(\dfrac{1}{p(p+1)}\right)\mathrm{e}^{-p} = \dfrac{2}{p} - \dfrac{2}{p+1} - \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right)\mathrm{e}^{-p} \\ &= \dfrac{2}{p} - \dfrac{2}{p+1} - \dfrac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-p} + \dfrac{1}{p+1}\,\mathrm{e}^{-p} \end{aligned}$$

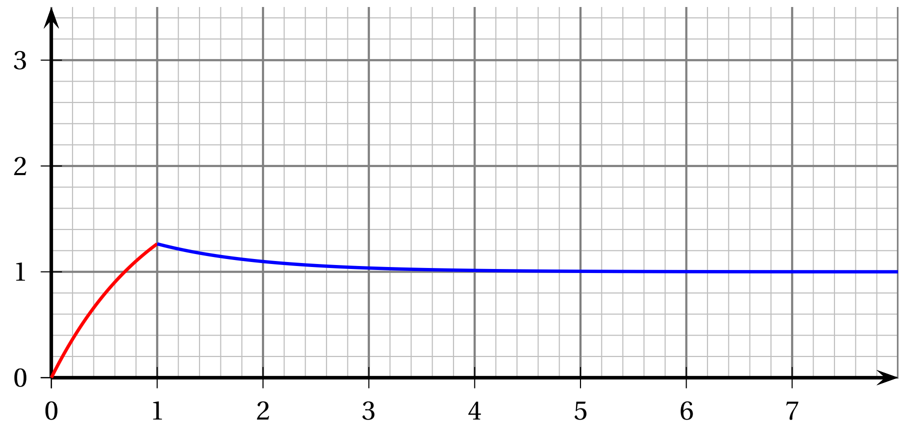
$$\begin{aligned} \text{Donc } s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{2}{p+1} - \dfrac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-p} + \dfrac{1}{p+1}\,\mathrm{e}^{-p}\right) \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-p}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\,\mathrm{e}^{-p}\right) \\ &= 2\mathcal{U}(t) - 2\,\mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1) + \mathrm{e}^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0\,;\,1[$, on a $\mathcal{U}(t) = 1$ et $\mathcal{U}(t-1) = 0$ donc : $s(t) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-t}$.

5. On admet que sur $[1\,;\,+\infty[$ on a : $s(t) = (\mathrm{e}-2)\,\mathrm{e}^{-t}+1$.

a. $s(1) = (\mathrm{e}-2)\,\mathrm{e}^{-1}+1 = 1-2\,\mathrm{e}^{-1}+1 = 2-2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}3$

b. On complète la courbe représentative de la fonction s.



c. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = 1$