Corrigé du BTS Métropole – 14 mai 2024
Groupement B3

Exercice 1 — 10 points

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant. On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.

$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que f est solution de l'équation différentielle : $(E) \quad y' + 0{,}06y = 2{,}1$.

1. On résout sur $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle : $(E_0) \quad y' + 0{,}06y = 0$.

   D'après le cours, on sait que l'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle (E_0) a pour solutions les fonctions y définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 35$.

   $g'(t) + 0{,}06g(t) = 0 + 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).
3. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$ où $k \in \mathbb{R}$.
4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle donc $f(0) = 0$.

   $f(0) = 0 \iff k\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 0} + 35 = 0 \iff k + 35 = 0 \iff k = -35$

   Donc la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

1. La résistance du béton après 7 jours de séchage est, en MPa :
   $f(7) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 7} + 35 \approx 12{,}0$.

   72 heures correspondent à 3 jours. Donc la résistance du béton après 72 heures de séchage est, en MPa : $f(3) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 3} + 35 \approx 5{,}8$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Pour tout réel $t \in [0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(t) = -35 \times (-0{,}06)\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 0 = 2{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$.
3. Pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}06t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

   On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. $\lim\limits_{T \to -\infty} \text{e}^{T} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}06t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{e}^{-0{,}06t} = 0$

   On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 35$.

   La résistance du béton va tendre vers 35 MPa.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.

   Cette résistance est donc de $f(28)$ soit environ 28,5 MPa.

   80 % de 35 correspondent à $0{,}8 \times 35 = 28$.

   Donc l'affirmation du fabricant est juste.

6. On considère la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = \left(\dfrac{1\,750}{3}\right) \text{e}^{-0{,}06t} + 35t$.

   $$\begin{aligned} F'(t) &= \left(\dfrac{1\,750}{3}\right) \times (-0{,}06)\,\text{e}^{-0{,}06t} + 35 = -\left(\dfrac{1\,750 \times 0{,}006}{3}\right) \text{e}^{-0{,}06t} + 35 \\ &= -35\,\text{e}^{-0{,}06t} + 35 = f(t) \end{aligned}$$

   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

7. La valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours est :

   $$\begin{aligned} M &= \dfrac{1}{28-0} \int_0^{28} f(t)\,\text{d}t = \dfrac{1}{28}\left[F(t)\right]_0^{28} = \dfrac{1}{28}\left[F(28) - F(0)\right] \\ &= \dfrac{1}{28}\left[\left(\left(\dfrac{1\,750}{3}\right) \text{e}^{-0{,}06\times 28} + 35 \times 28\right) - \left(\left(\dfrac{1\,750}{3}\right) \text{e}^{-0{,}06\times 0} + 35 \times 0\right)\right] \\ &= \dfrac{1}{28}\left[\left(\dfrac{1\,750}{3}\right) \text{e}^{-1{,}68} + 980 - \dfrac{1\,750}{3}\right] \approx 18 \end{aligned}$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. On complète l'algorithme.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que $R < 21$
Ligne 4	$t \leftarrow t + 1$
Ligne 5	$R \leftarrow -35\,\text{e}^{-0{,}06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. En utilisant la calculatrice, on trouve : $f(15) \approx 20{,}8 < 21$ et $f(16) \approx 21{,}6 > 21$.

   Donc le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa est $N = 16$.

Exercice 2 **10 points**

On étudie le fonctionnement d'un filtre. La tension en entrée du filtre est une fonction E pour laquelle on possède les informations suivantes :

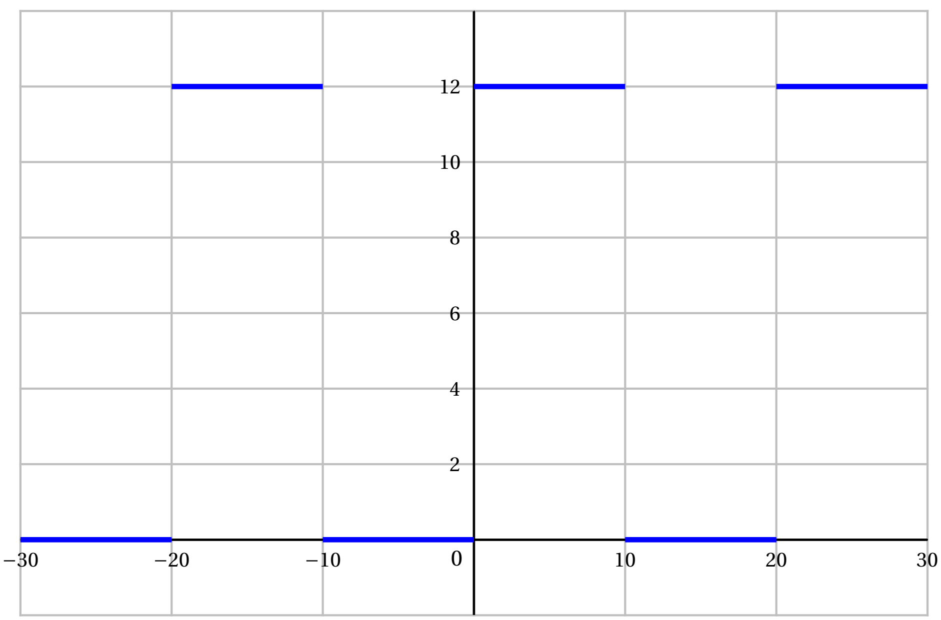
- E est une fonction périodique de période $T = 20$.
- $E(t) = \begin{cases} 12 & \text{si} \quad t \in [0\,;\,10[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [10\,;\,20[. \end{cases}$

1. On note ω la pulsation de la fonction E.

D'après le cours, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ donc $\omega = \dfrac{2\pi}{20} = \dfrac{\pi}{10}$.

2. On représente la courbe de la fonction E en respectant les consignes suivantes :

- Échelle des abscisses : 2 cm pour représenter l'intervalle allant de $t = 0$ à $t = 10$.
- Échelle des ordonnées : 1 cm pour représenter l'intervalle allant de $E = 0$ à $E = 2$.
- La représentation est effectuée pour $t \in [-30\,;\,30]$.



3. La valeur moyenne a_0 de E est :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\int_0^{20} E(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\int_0^{10} 12\,\mathrm{d}t + \frac{1}{20}\int_{10}^{20} 0\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\left[12t\right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{20} \times 120 = 6$$

4. $$(E_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [E(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\int_0^{20} [E(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\int_0^{10} 12^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{20}\int_{10}^{20} 0^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{20}\left[144t\right]_0^{10} = \frac{1}{20} \times 1440 = 72$$

Donc $E_{\text{eff}} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T E(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{20}\int_0^{20} E(t)\cos\left(\frac{\pi n t}{10}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{20}\int_0^{10} 12\cos\left(\frac{\pi n t}{10}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{10}\left[12\times\frac{10}{n\pi}\sin\left(\frac{\pi n t}{10}\right)\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\times\frac{10}{n\pi}\left[12\sin(n\pi) - 12\sin(0)\right] = 0$$

6. On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $b_n = \dfrac{12}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$.

Si n est pair, on a $\cos(n\pi) = 1$ donc $b_n = \dfrac{12}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right] = 0$.

7. On complète le tableau ci-dessous avec des valeurs arrondies à 0,01.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n	7,64	0	2,55	0	1,53	0	1,09

8. On considère la grandeur E_7 définie par : $(E_7)^2 = (a_0)^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{7}\left[(a_k)^2 + (b_k)^2\right]$.

$(E_7)^2 = 6^2 + \dfrac{1}{2}\left(7{,}64^2 + 2{,}55^2 + 1{,}53^2 + 1{,}09^2\right) \approx 70{,}20$

Donc $E_7 \approx \sqrt{70{,}20}$ et donc $E_7 \approx 8{,}38$.

Or $E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$.

L'erreur est donc d'environ $\dfrac{8{,}49 - 8{,}38}{8{,}49} \times 100$ soit environ 1,3 %.

L'affirmation « E_7 représente une approximation de E_{eff} avec moins de 5 % d'erreur » est donc vraie.