Corrigé du BTS Métropole – 14 mai 2024

Groupement B4

Exercice 1 **10 points**

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant. On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.

$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que f est solution de l'équation différentielle : $(E) \quad y' + 0{,}06y = 2{,}1$.

1. On résout sur $[0~;~+\infty[$ l'équation différentielle : $(E_0) \quad y' + 0{,}06y = 0$.

   D'après le cours, on sait que l'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle (E_0) a pour solutions les fonctions y définies sur $[0~;~+\infty[$ par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction constante g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = 35$.

   $g'(t) + 0{,}06g(t) = 0 + 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).
3. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$ où $k \in \mathbb{R}$.
4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle donc $f(0) = 0$.

   $f(0) = 0 \iff k\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 0} + 35 = 0 \iff k + 35 = 0 \iff k = -35$

   Donc la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(t) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(t) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

1. La résistance du béton après 7 jours de séchage est, en MPa :
   $f(7) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 7} + 35 \approx 12{,}0$.

   72 heures correspondent à 3 jours. Donc la résistance du béton après 72 heures de séchage est, en MPa : $f(3) = -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 3} + 35 \approx 5{,}8$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Pour tout réel $t \in [0~;~+\infty[$, on a : $f'(t) = -35 \times (-0{,}06)\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 0 = 2{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$.
3. Pour tout t de $[0~;~+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}06t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

   On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

4. $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0{,}06t = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}06t} = 0$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 35$.

   La résistance du béton va tendre vers 35 MPa.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.

   Cette résistance est donc de $f(28)$ soit environ 28,5 MPa.

   80 % de 35 correspondent à $0{,}8 \times 35 = 28$.

   Donc l'affirmation du fabricant est juste.

6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = \left(\dfrac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35t$.

   $$F'(t) = \left(\frac{1\,750}{3}\right) \times (-0{,}06)\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35 = -\left(\frac{1\,750 \times 0{,}006}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$$
   $$= -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35 = f(t)$$

   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

7. La valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours est :

   $$M = \frac{1}{28-0}\int_0^{28} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{28}\left[F(t)\right]_0^{28} = \frac{1}{28}\left[F(28) - F(0)\right]$$
   $$= \frac{1}{28}\left[\left(\left(\frac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06\times 28} + 35 \times 28\right) - \left(\left(\frac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06\times 0} + 35 \times 0\right)\right]$$
   $$= \frac{1}{28}\left[\left(\frac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-1{,}68} + 980 - \frac{1\,750}{3}\right] \approx 18$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

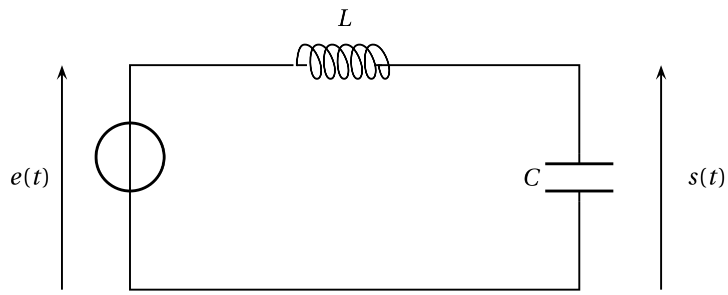
1. On complète l'algorithme.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que $R < 21$
Ligne 4	$\quad t \leftarrow t+1$
Ligne 5	$\quad R \leftarrow -35\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. En utilisant la calculatrice, on trouve : $f(15) \approx 20{,}8 < 21$ et $f(16) \approx 21{,}6 > 21$.

   Donc le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa est $N = 16$.

Exercice 2 — 10 points



On considère un circuit LC.
Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.
Le système est régi par l'équation différentielle (E) : $LCs''(t) + s(t) = e(t)$.
Les conditions initiales sont : $s\left(0^+\right) = 0$ et $s'\left(0^+\right) = 0$.

1. On sait que $L = 10$ H et $C = 10^{-5}$ F. L'équation différentielle (E) s'écrit donc :
   $10 \times 10^{-5} \times s''(t) + s(t) = e(t)$ soit $10^{-4}s''(t) + s(t) = e(t)$.
2. On suppose que : la fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$ et que la fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.

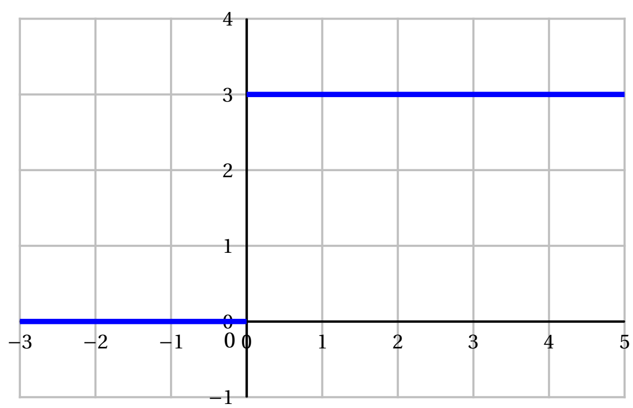
   On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle et on utilise sa linéarité.

   $$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(10^{-4}s''(t) + s(t)\right) = \mathscr{L}\left(e(t)\right) &\iff 10^{-4}\mathscr{L}\left(s''(t)\right) + \mathscr{L}\left(s(t)\right) = \mathscr{L}\left(e(t)\right)\\ &\iff 10^{-4}\left(p^2S(p) - ps(0^+) - s'(0^+)\right) + S(p) = E(p)\\ &\iff 10^{-4}p^2S(p) + S(p) = E(p) \iff \left(10^{-4}p^2 + 1\right)S(p) = E(p)\end{aligned}$$
3. La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

   Donc $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{S(p)}{\left(10^{-4}p^2 + 1\right)S(p)} = \dfrac{1}{10^{-4}p^2 + 1} = \dfrac{1}{\frac{1}{10^4}p^2 + 1} = \dfrac{10^4}{p^2 + 10^4}$
4. On note $\mathscr{U}(t)$ la fonction échelon unité définie ainsi : $\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0\\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0\end{cases}$

   On suppose désormais que l'on a : $e(t) = 3\mathscr{U}(t)$.

   On représente graphiquement le signal $e(t)$.



5. D'après le formulaire, on peut dire que $E(p) = \dfrac{3}{p}$.

6. $\left(10^{-4}p^2+1\right)S(p) = E(p)$ donc $S(p) = \dfrac{E(p)}{10^{-4}p^2+1} = \dfrac{\frac{3}{p}}{10^{-4}p^2+1} = \dfrac{3}{10^{-4}p^3+p} = \dfrac{3\times 10^4}{p^3+10^4p}$

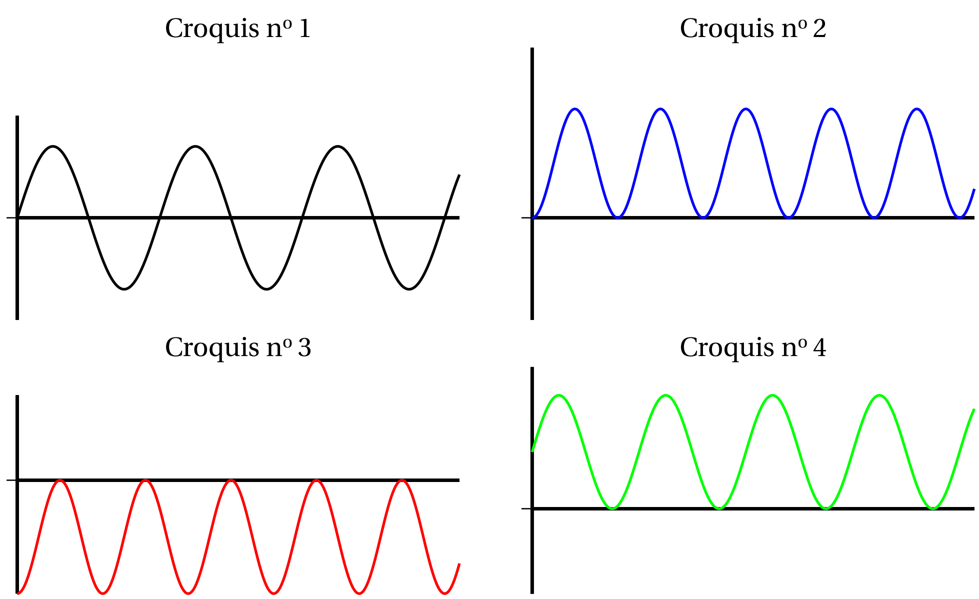
$\dfrac{3}{p} - \dfrac{3p}{p^2+10^4} = \dfrac{3\left(p^2+10^4\right)}{p\left(p^2+10^4\right)} - \dfrac{3p^2}{p\left(p^2+10^4\right)} = \dfrac{3p^2+3\times 10^4-3p^2}{p^3+10^4p} = \dfrac{3\times 10^4}{p^3+10^4p} = S(p)$

7. Il s'agit de chercher la fonction dont la transformée de Laplace est $S(p) = \dfrac{3}{p} - \dfrac{3p}{p^2+10^4}$.

- Pour obtenir la fonction $p \longmapsto \dfrac{1}{p}$, il faut partir de $t \longmapsto \mathcal{U}(t)$, donc pour obtenir la fonction $p \longmapsto \dfrac{3}{p}$, il faut partir de $t \longmapsto 3\mathcal{U}(t)$.
- Pour obtenir la fonction $p \longmapsto \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, il faut partir de la fonction $t \longmapsto \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, donc pour obtenir la fonction $p \longmapsto \dfrac{3p}{p^2+10^4}$, il faut partir de $t \longmapsto 3\cos(10^2t)\mathcal{U}(t)$.

On en déduit que $s(t) = 3\mathcal{U}(t) - 3\cos(10^2t)\mathcal{U}(t) = 3\mathcal{U}(t)\left[1-\cos(100t)\right]$.

8. On considère les 4 croquis ci-dessous.



Le croquis représentant la courbe de $s(t)$ est le croquis 2.

En effet :

- Pour $t = 0$ on a $\cos(100t) = \cos(0) = 1$ donc $s(0) = 0$.
  On peut donc éliminer les croquis 3 et 4.
- $-1 \leqslant \cos(100t) \leqslant 1$ donc $1-\cos(100t) \geqslant 0$ et donc $s(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$.
  On peut donc éliminer le croquis 1.

Exercice 3 — 6 points

Une usine produit des ampoules pour voitures.

Partie A. Probabilités conditionnelles

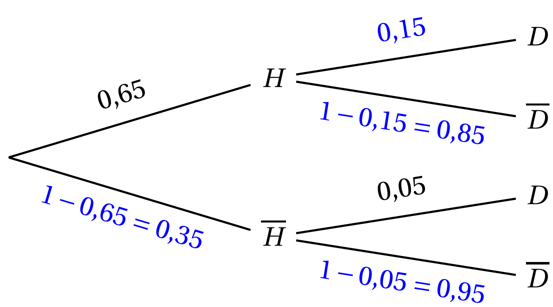
On dispose des données suivantes :

- 65 % des ampoules produites sont des ampoules pour l'habitacle.
  Parmi elles, 15 % sont défectueuses.
- 35 % des ampoules produites sont des ampoules pour les phares.
  Parmi elles, 5 % sont défectueuses.

On choisit une ampoule au hasard et on considère les évènements suivants :

- H : l'ampoule est une ampoule pour l'habitacle.
- D : l'ampoule est défectueuse.

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous qui décrit la situation.



2. $P(H \cap D) = P(H) \times P_H(D) = 0,65 \times 0,15 = 0,0975$
3. D'après la formule des probabilités totales :

   $P(D) = P(H \cap D) + P\left(\overline{H} \cap D\right) = 0,0975 + 0,35 \times 0,05 = 0,115$
4. L'ampoule choisie est défectueuse.

   La probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule pour phares est :

   $$P_D\left(\overline{H}\right) = \frac{P\left(\overline{H} \cap D\right)}{P(D)} = \frac{0,35 \times 0,05}{0,115} \approx 0,152$$

Partie B. Loi binomiale

On rappelle que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est égale à 0,115. On prélève un échantillon aléatoire de 300 ampoules. On suppose que ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ampoules défectueuses au sein de cet échantillon.

1. Quand on choisit au hasard une ampoule, il y a deux issues possibles : elle est défectueuse, avec une probabilité $p = 0{,}115$, ou elle ne l'est pas.

On prélève un échantillon aléatoire de 300 ampoules et on suppose que ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise.

Il s'agit donc d'une répétition de 300 épreuves identiques et indépendantes.

La variable aléatoire X qui compte le nombre d'ampoules défectueuses au sein de cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}115$.

2. La probabilité qu'exactement 30 ampoules de l'échantillon soient défectueuses est : $P(X = 30) \approx 0{,}054$

3. La probabilité qu'au plus 20 ampoules de l'échantillon soient défectueuses est : $P(X \leqslant 20) \approx 0{,}004$