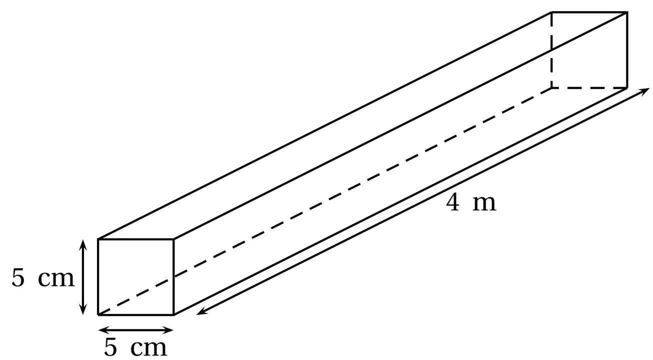
Corrigé du BTS Groupement C1 – 14 mai 2024

Exercice 1 — 10 points

Le bois d'épicéa est couramment utilisé en France pour la construction. Avant son utilisation, il est nécessaire de le faire sécher. La teneur en humidité du bois d'épicéa correspond au pourcentage d'eau contenu dans le bois. On considère ici des poutres d'épicéa ayant la forme d'un pavé droit de longueur 4 m et dont la base est un carré de côté 5 cm.



Partie A - modélisation de la teneur en humidité

1. On considère que lors du séchage 96 % de la surface extérieure d'une poutre est exposée à l'air. La surface extérieure de la poutre, en cm^2 est : $2 \times 5^2 + 4 \times 5 \times 400 = 8\,050$.

   96 % de 8 050 donnent 7 728 soit 0,772 8 m^2.
2. On admet que pour le bois considéré dans cette partie et les conditions de séchage envisagées, la teneur en humidité, exprimée en pourcentage, est une fonction f du temps t exprimé en semaine, qui vérifie l'équation différentielle :

   $$(E) : \quad y' + 0{,}038\,64y = 0{,}003\,864$$

   où y est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et y' est sa fonction dérivée.

   a. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 0{,}1$.

   $g'(t) + 0{,}038\,64g(t) = 0 + 0{,}038\,64 \times 0{,}1 = 0{,}003\,864$

   Donc la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).

   b. Soit (E_0) l'équation homogène : $y' + 0{,}038\,64y = 0$.

   D'après le cours, on sait que l'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle (E_0) a pour solutions les fonctions y définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $y(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}038\,64t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

   c. On déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $y(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}038\,64t} + 0{,}1$ où $k \in \mathbb{R}$.

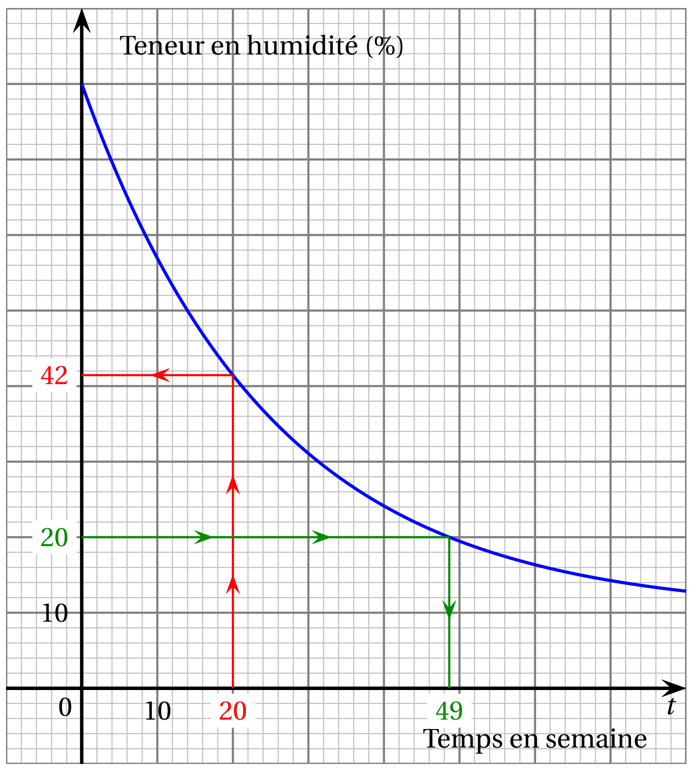
d. On cherche la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) telle que la teneur en humidité initiale, c'est-à-dire au temps $t = 0$, est de 80 %.

Autrement dit, on cherche le réel k tel que $f(0) = 0{,}8$, c'est-à-dire $k\,\mathrm{e}^{0} + 0{,}1 = 0{,}8$, donc $k = 0{,}7$.

On a donc $f(t) = 0{,}7\,\mathrm{e}^{-0{,}03864t} + 0{,}1$.

Partie B - Temps de séchage

On admet que la fonction représentée ci-dessous est la fonction f qui exprime la teneur en humidité du bois d'épicéa, en pourcentage, en fonction du temps t, exprimé en semaine.



On utilise le graphique pour répondre aux questions suivantes.

1. La teneur en humidité d'une poutre après 20 semaines de séchage est de 42 %.
2. Ces poutres sont vendues une fois que leur teneur en humidité est inférieure à 20 %.
   Ces poutres peuvent elles être vendues au bout de 49 semaines.

Partie C - Teneur en humidité

Dans cette partie, on admet que l'expression de la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ représentant la teneur en humidité, en pourcentage, du bois d'épicéa en fonction du temps t, exprimé en semaine, est : $f(t) = 0,7\,\text{e}^{-0,04t} + 0,01$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu la capture d'écran suivante :

▶ Calcul formel	⊠
1	`f(t) := 0.7 exp(-0.04t) + 0.1` $\approx$ f(t) := $0.7\,\text{e}^{-0.04t} + 0.1$
2	`Dérivée[f]` $\approx -0.028\,\text{e}^{-0.04t}$
3	`Intégrale[f]` $\approx -17.5\,\text{e}^{-0.04t} + 0.1t$
4	`Limite[f , +∞]` ≈ 0.1

1. En utilisant les résultats précédents, on répond aux questions suivantes.

a. D'après la ligne 4 du tableau, la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 0,1.

Si le temps de séchage augmente indéfiniment, il restera un taux d'humidité de 10 % dans la poutre.

b. À l'aide du contexte, on peut conjecturer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$.

c. D'après la ligne 2 du tableau, $f'(t) = -0,028\,\text{e}^{-0,04t}$.

Or, pour tout réel x, on a : $\text{e}^{x} > 0$ donc, pour tout t de $[0~;~+\infty[$, on a : $\text{e}^{-0,04t} > 0$ et donc $f(t) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** On résout pour t appartenant à $[0~;~+\infty[$ l'inéquation : $f(t) \leqslant 0,2$.

$$f(t) \leqslant 0,2 \iff 0,7\,\text{e}^{-0,04t} + 0,1 \leqslant 0,2 \iff 0,7\,\text{e}^{-0,04t} \leqslant 0,1 \iff \text{e}^{-0,04t} \leqslant \frac{0,1}{0,7}$$

$$\iff -0,04t \leqslant \ln\left(\frac{1}{7}\right) \iff t \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{0,04}$$

Or $-\dfrac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{0,04} \approx 48,65$ donc $t \geqslant 49$.

b. Il faut donc un temps de séchage d'au moins 49 semaines pour que la teneur en humidité soit inférieure à 20 %.

Exercice 2 **10 points**

Une entreprise produit en grande série des vis au moyen de deux chaînes de production.

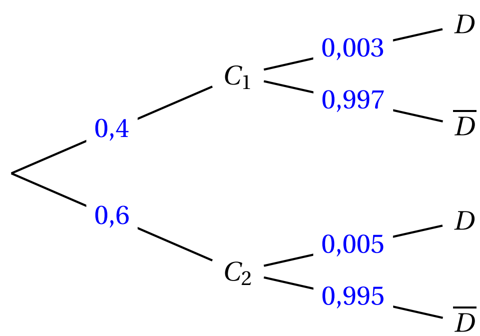
Partie A - Production de vis

On choisit au hasard une vis dans le stock. On note :

- C_1 l'évènement « la vis provient de la première chaîne » ;
- C_2 l'évènement « la vis provient de la deuxième chaîne » ;
- D l'évènement « la vis a un défaut ».

La première chaîne produit 40 % du stock et on sait que sur cette chaîne 3 vis sur 1 000 ont un défaut. De plus, on sait que sur la deuxième chaîne, 5 vis sur 1 000 ont un défaut.

1. On complète l'arbre pondéré.



2. La probabilité que la vis choisie provienne de la première chaîne et présente un défaut est : $P(C_1 \cap D) = P(C_1) \times P_{C_1}(D) = 0{,}4 \times 0{,}004 = 0{,}0012$.

3. La probabilité que la vis présente un défaut est $P(D)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) = 0{,}0012 + 0{,}6 \times 0{,}005 = 0{,}0042$

4. On choisit une vis du stock et on constate qu'elle présente un défaut.

La probabilité qu'elle provienne de la première chaîne est :

$P_D(C_1) = \dfrac{P(C_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}0012}{0{,}0042} \approx 0{,}286.$

Il y a donc 28,6 % de chance que la vis défectueuse provienne de la première chaîne, donc il est inexact de dire qu'il y a moins de 25 % de chances qu'elle provienne de la première chaîne de production.

Partie B - Étude d'un lot

Dans cette partie, on admet que la probabilité qu'une vis ait un défaut vaut 0,004.
On prélève, dans le stock d'une journée, un lot de 50 vis. On admet que ce stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque prélèvement d'un lot de 50 vis, associe le nombre de vis ayant un défaut.

1. Pour une vis donnée, il n'y a que deux possibilités : elle présente un défaut, avec une probabilité de $p = 0{,}004$, ou elle n'en présente pas.

   De plus, on admet que ce stock est suffisamment important pour que le prélèvement de 50 vis soit assimilé à un tirage avec remise : on est donc dans le cas d'une répétition de 50 prélèvements identiques et indépendants.

   Donc la variable aléatoire X qui à chaque prélèvement d'un lot de 50 vis, associe le nombre de vis ayant un défaut, suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}004$.
2. **a.** La probabilité que ce lot contienne exactement 2 vis ayant un défaut est :

   $P(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0{,}004^2 \times (1 - 0{,}004)^{50-2} \approx 0{,}016$.

   b. La probabilité que ce lot contienne au moins 3 vis ayant un défaut est, d'après la calculatrice : $P(X \geqslant 3) \approx 0{,}001$.

Partie C - Conformité des vis

Dans cette partie, on s'intéresse à la longueur des vis produites par la première chaîne de production. On appelle L la variable aléatoire qui, à chaque vis de la production, associe sa longueur en millimètre. On admet que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. Une vis est considérée comme conforme lorsque sa longueur est comprise entre 59,60 mm et 60,40 mm.

1. Dans cette question, on suppose que $\mu = 60$ et $\sigma = 0{,}25$.

   La probabilité qu'une vis choisie au hasard dans le stock soit conforme est, d'après la calculatrice : $P(59{,}60 \leqslant X \leqslant 60{,}40) \approx 0{,}89$.
2. Les vis sont considérées conformes si leur longueur moyenne est de 60 mm.
   Afin de vérifier le bon réglage des machines de fabrication des vis produites par la première chaîne de production, on construit un test d'hypothèse bilatéral relativement à la moyenne des longueurs des vis, au seuil de risque de 5 %.

   L'hypothèse nulle du test est donc $H_0 : \mu = 60$.

   a. Le test est bilatéral donc l'hypothèse alternative H_1 est $\mu \neq 60$..

   On note $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 vis produites par la première chaîne,, associe la moyenne des longueurs de ces 100 vis.
   Sous l'hypothèse H_0, on admet que $\overline{L}$ suit la loi normale d'espérance mathématique 60 et d'écart type $\sigma' = 0{,}025$.

   b. On admet que $P\left(59{,}95 \leqslant \overline{L} \leqslant 60{,}05\right) = 0{,}95$.

   On peut énoncer la règle de décision :

   - si la moyenne des longueurs des 100 vis de l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $[59{,}95\ :\ 60{,}05]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
   - sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

c. On prélève un échantillon de 100 vis et on obtient, pour cet échantillon, une moyenne des longueurs des 100 vis égale à 60,03 mm.

$60{,}03 \in \left[59{,}95\ ;\ 60{,}05\right]$ donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0 au risque de 5 %, et il n'y a donc pas lieu d'effectuer un réglage de la première chaîne de production.